Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Osnove matematične analize: drugi računski izpit

27. januar 2023

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Uporaba kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Poišči vse kompleksne rešitve enačbe $z \cdot \overline{z} + z^2 + i \cdot z = 1$.
Rešitev : Z nastavkom $z = x + iy$ dobimo

$$x^2 + y^2 + x^2 + 2ixy - y^2 + i(x + iy) = 1$$

kar lahko poenostavimo v

$$2x^2 - y + i(2xy + x) = 1$$

Če izenačimo realna in imaginarna dela, dobimo sistem realnih enačb

$$\begin{aligned} 2x^2 - y &= 1 \\ x(2y + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Glede na drugo enačbo moramo obravnavati dva primera:

1. $x = 0$: iz prve enačbe potem sledi $y = -1$
2. $y = -\frac{1}{2}$: iz prve enačbe sledi $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$.

Skupaj imamo torej tri rešitve:

$$\begin{aligned} z_1 &= -i \\ z_2 &= -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \\ z_3 &= \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) (10 točk) Naj bo w tista rešitev enačbe iz **a)** naloge, ki ima najmanjši imaginarni del. Poišči vse kompleksne rešitve enačbe $z^3 = w$.
Rešitev : Najmanjši imaginarni del ima $z_1 = -i = w$. Polarna oblika w je

$$w = e^{\frac{3\pi}{2}i},$$

rešitve enačbe $z^3 = w$ pa lahko zapišemo kot

$$z_k = e^{\frac{\pi}{2}i + \frac{2k\pi}{3}i}, \text{ za } k = 0, 1, 2$$

2. naloga (25 točk)

Rekurzivno zaporedje je podano s formulo

$$a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}$$

za $n \geq 1$ in začetnim členom $a_1 = 2$. Dokaži, da je zaporedje a_n konvergentno in izračunaj limito.
Rešitev : Fiksne točke iteracije so rešitve enačbe

$$\begin{aligned} a &= 4 - \frac{3}{a} \\ a^2 &= 4a - 3 \\ (a-1)(a-3) &= 0 \end{aligned}$$

Možni limiti sta torej $a = 1$ ali $a = 3$. Glede na prvih nekaj členov lahko domnevamo, da zaporedje narašča proti 3. To lahko dokažemo z indukcijo.

Dokaz $a_{n+1} \geq a_n$ za vse $n \geq 1$: Očitno velja $a_2 \geq a_1$. Iz indukcijske predpostavke $a_n \geq a_{n-1}$ sledi

$$\begin{aligned} a_n &\geq a_{n-1} \\ \frac{3}{a_n} &\leq \frac{3}{a_{n-1}} \\ -\frac{3}{a_n} &\geq -\frac{3}{a_{n-1}} \\ 4 - \frac{3}{a_n} &\geq 4 - \frac{3}{a_{n-1}} \\ a_{n+1} &\geq a_n \end{aligned}$$

Pri drugem koraku smo upoštevali, da imamo po indukcijski predpostavki $a_n \geq a_{n-1} \geq a_1 = 2 > 0$.

Dokaz $a_n \leq 3$ za vse $n \geq 1$: Po definiciji imamo $a_1 = 2 < 3$. Neenačba $a_{n+1} \leq 3$ je ekvivalentna

$$\begin{aligned} 4 - \frac{3}{a_n} &\leq 3 \\ 4a_n - 3 &\leq 3a_n \\ a_n &\leq 3, \end{aligned}$$

kar pa je indukcijska predpostavka. Tudi tu smo morali pri drugem koraku upoštevati, da je $a_n > 0$, kar pa že vemo.

Ker je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, lahko sklepamo, da je konvergentno. Edina možnost za limito je

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 3$$

3. naloga (25 točk)

Med pravokotniki v (x, y) ravnini, ki imajo stranice vzporedne koordinatnim osem, in ki imajo eno oglišče v izhodišču koordinatnega sistema, eno oglišče pa leži na krivulji z enačbo

$$2x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

(v prvem kvadrantu, kjer je $x > 0$ in $y > 0$), poišči tistega, ki ima največjo ploščino.

Rešitev : Maksimizirati je potrebno ploščino pravokotnika

$$p = x \cdot y,$$

kjer točka (x, y) leži na dani krivulji.

1. način : Ploščino izrazimo kot funkcijo ene spremenljivke x

$$f(x) = x \cdot y(x) = x \cdot (1 - 2x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

Ekstremno ploščino dobimo tam, kjer je odvod funkcije $f(x)$ enak 0. Z odvajanjem dobimo

$$f'(x) = (1 - 2x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} + x\frac{3}{2}(1 - 2x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \left(2 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right) = \ldots = \left(1 - 4x^{\frac{2}{3}}\right)\left(1 - 2x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Odvod $f'(x)$ je enak 0 v dveh primerih

$$1 - 4x^{\frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

ali

$$1 - 2x^{\frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$$

Druga možnost da $y = 0$ (in s tem ploščino 0), prva možnost pa $y = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$. Maksimalno ploščino dobimo torej za $x = \frac{1}{8}$.

2. način : Problem lahko rešimo tudi z Lagrangeovimi množitelji. Definiramo Lagrangeovo funkcijo

$$L(x, y, \lambda) = x \cdot y - \lambda(2x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 1)$$

Sistem enačb, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{aligned} L_x &= y - \lambda \cdot \frac{2}{3} \cdot 2x^{-\frac{1}{3}} = 0 \\ L_y &= x - \lambda \cdot \frac{2}{3} \cdot y^{-\frac{1}{3}} = 0 \end{aligned}$$

skupaj seveda s pogojem $2x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$. Tudi tu se z nekaj truda dobi rešitev $x = \frac{1}{8}$.

4. naloga (25 točk)

Naj bo $f(x) = \sin(x)e^{-x}$.

a) (15 točk) Z uporabo integriranja po delih izračunaj nedoločeni integral $\int f(x)dx$.
Rešitev : Per partes

$$\begin{aligned} u = \sin(x) \quad &\Rightarrow \quad du = \cos(x) \\ dv = e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad v = -e^{-x} \end{aligned}$$

da enačbo

$$\int \sin(x)e^{-x}dx = uv - \int vdu = -\sin(x)e^{-x} + \int \cos(x)e^{-x}dx$$

Še en per partes

$$\begin{aligned} u = \cos(x) \quad &\Rightarrow \quad du = -\sin(x) \\ dv = e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad v = -e^{-x} \end{aligned}$$

da enačbo

$$\int \sin(x)e^{-x}dx = -\sin(x)e^{-x} - \cos(x)e^{-x} - \int \sin(x)e^{-x}dx$$

Če označimo $I = \int \sin(x)e^{-x}dx$, dobimo torej enačbo

$$I = -e^{-x}(\cos(x) + \sin(x)) - I$$

oziroma

$$I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))$$

b) (10 točk) Izračunaj posplošeni integral $\int_0^\infty f(x)dx$.
Rešitev : Računamo

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{y\to\infty} \int_0^y \sin(x)e^{-x}dx = \lim_{y\to\infty} -\frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=y}$$

$$= \lim_{y\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\frac{\cos(y) + \sin(y)}{e^y} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

pri čemer smo na koncu upoštevali, da $|\cos(y) + \sin(y)| \leq 2$ in $\lim_{y\to\infty} e^y = \infty$.