Rešitve 1. kolokvija (1.12.2022)

1. naloga (25 točk)

Dano je kompleksno število

$$a = \frac{2}{1+i}.$$

a) (5 točk) Določite Re(a) in Im(a).

$$a = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i}{1^2+1^2} = \frac{2-2i}{2} = 1-i \quad 3$$

$$\mathrm{Re}(a) = 1 \quad , \quad \mathrm{Im}(a) = -1 \quad 2$$

b) (10 točk) Izračunajte a^8.

Število a zapišemo v polarni obliki:

$$|a| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \quad 2$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} \checkmark \quad 2$$

$$a = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Uporabimo De Moivrovo formulo:

$$a^8 = (\sqrt{2})^8\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{8\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2^4\left(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)\right)$$

$$= 16\,(1 + i\cdot 0) = \underline{\underline{16}} \quad 6$$

c) **(10 točk)** Poiščite vse rešitve enačbe $z^4 = -a^8$. Rešitve zapišite v obliki $x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$ in jih skicirajte v kompleksni ravnini.

Rešujemo enačbo $z^4 = -16$.

Število -16 zapišemo v polarni obliki:

$$-16 = 16e^{i\pi}$$ 2

Rešitve enačbe $z^4 = -16$ so oblike:

$$z_k = \underbrace{\sqrt[4]{16}}_{=2}\, e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{4}}; \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$ 2

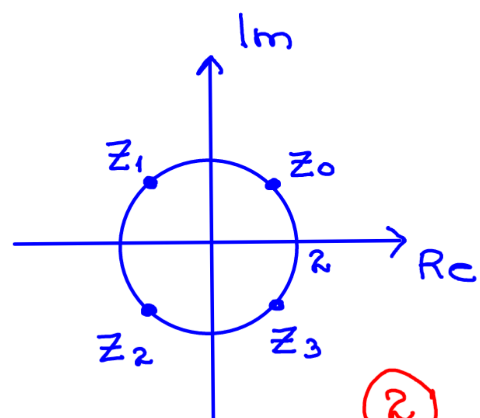
4

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = 2e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$



2

2. naloga (25 točk)

Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{3^{n+1}-1}{3^n}$.

a) (10 točk) Pokažite, da je zaporedje a_n naraščajoče.

Pokazati moramo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja
$a_n \leq a_{n+1}$ 2

$$\frac{3^{n+1}-1}{3^n} \leq \frac{3^{n+2}-1}{3^{n+1}} \quad / \cdot 3^{n+1}$$ 2

$$3 \cdot (3^{n+1}-1) \leq 3^{n+2}-1$$ 2

$$\cancel{3^{n+2}} - 3 \leq \cancel{3^{n+2}} - 1$$ 2

$$-3 \leq -1 \checkmark$$ 2

b) (10 točk) Pokažite, da je zaporedje a_n omejeno: utemeljite, da je $M = 3$ njegova zgornja meja, $m = 2$ pa njegova spodnja meja.

Pokazati moramo, da je

- $a_n \leq 3$ za vse $n \in \mathbb{N}$: 8

$$\frac{3^{n+1}-1}{3^n} \leq 3 \quad / \cdot 3^n$$

$$\cancel{3^{n+1}} - 1 \leq \cancel{3^{n+1}}$$

$$-1 \leq 0 \checkmark$$

- $a_n \geq 2$ za vse $n \in \mathbb{N}$:

To velja, saj je zaporedje a_n naraščajoče in $a_0 = 2$. 2

c) (5 točk) Poiščite limito zaporedja a_n.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}-1}{3^n} \begin{array}{l} /:3^n \\ /:3^n \end{array} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{3^n}}{1} = \underline{\underline{3}} \qquad 5$$

$\frac{1}{3^n} \to 0$

3. naloga (25 točk)

Naj bo funkcija f podana s predpisom $f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x}\right)$, kjer log označuje naravni logaritem (logaritem z osnovo e).

a) (10 točk) Poiščite definicijsko območje funkcije f.

$$\frac{x+1}{x} > 0 \qquad 3$$

1. $x+1>0$ in $x>0$

   $\underbrace{x>-1 \text{ in } x}_{x>0} >0$

   $x \in (0,\infty)$ 3

2. $x+1<0$ in $x<0$

   $\underbrace{x<-1 \text{ in } x}_{x<-1} <0$

   $x \in (-\infty,-1)$ 3

$$D_f = (-\infty,-1) \cup (0,\infty) \qquad 1$$

b) (10 točk) Pokažite, da je f injektivna funkcija.

f je injektivna, če za vsaka $x_1, x_2 \in D_f$:
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Naj bosta $x_1, x_2 \in D_f$.

Naj bo $f(x_1) = f(x_2)$. 3

$$\log\left(\frac{x_1+1}{x_1}\right) = \log\left(\frac{x_2+1}{x_2}\right)$$

$$\frac{x_1+1}{x_1} = \frac{x_2+1}{x_2} \quad / \cdot x_1 x_2$$ 3

$$(x_1+1)x_2 = (x_2+1)x_1$$

$$\cancel{x_1 x_2} + x_2 = \cancel{x_1 x_2} + x_1$$

$$x_1 = x_2 \checkmark$$ 3

je injektivna 1

c) (5 točk) Poiščite inverz f^{-1} funkcije f.

$$y = \log\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Zamenjamo vlogi x in y:

$$x = \log\left(\frac{y+1}{y}\right) \quad / e^{\wedge}$$

$$e^x = \frac{y+1}{y}$$ 1

$$e^x y = y + 1$$

$$e^x y - y = 1$$

2

$$y(e^x - 1) = 1$$

$$y = \frac{1}{e^x - 1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$ 2

4. naloga (25 točk)

Naj bo funkcija f podana s predpisom $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2-9}$.

a) (15 točk) Določite definicijsko območje, ničle in pole funkcije f. Zapišite enačbo asimptote ter določite presečišče grafa f z asimptoto. Skicirajte graf funkcije f.

- $D_f: \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ 2

- ničle: $f(x)=0$

$$x^3-4x=0$$
$$x(x^2-4)=0$$
$$x(x-2)(x+2)=0$$
$$x_1=0 \quad x_2=2 \quad x_3=-2$$ 2

- poli: $x^2-9=0$

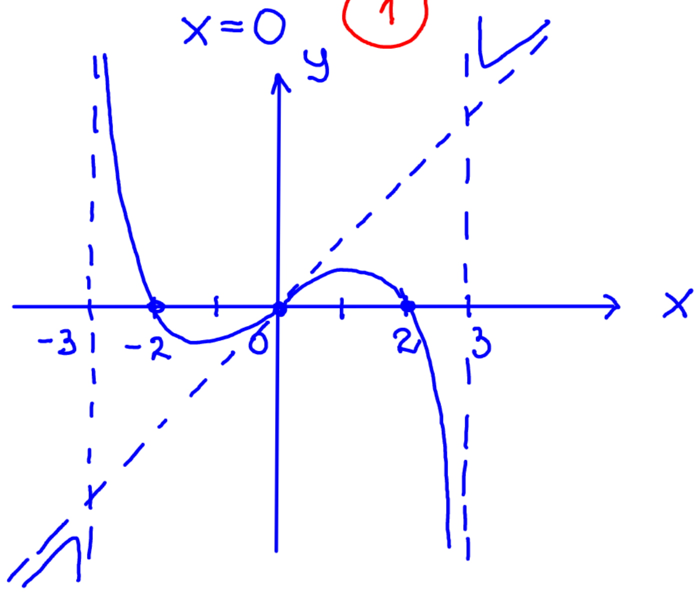
$$(x-3)(x+3)=0$$
$$x_1=3 \quad x_2=-3$$ 2

- asimptota: $(x^3-4x):(x^2-9) = x$ 2

$$\oplus \quad \underline{-x^3+9x}$$
$$5x$$

enačba asimptote:
$y=x$ 1

presečišče z asimptoto:
$$5x=0$$
$$x=0$$ 1



5

b) (10 točk) Ali je funkcija

$$g(x) = \begin{cases} x+2, & x < -2, \\ f(x), & -2 \le x \le 2, \\ \dfrac{(x-2)^2}{x^2-4}, & x > 2. \end{cases}$$

zvezna v točkah $x = -2$ in $x = 2$? Utemeljite.

• g je zvezna v $x=-2$, če je
$$\lim_{x \uparrow -2} g(x) = g(2).$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\uparrow -2} g(x) = \lim_{x \uparrow -2}(x+2) = -2+2 = 0 \\ &g(-2) = f(-2) = \frac{(-2)^3 - 4(-2)}{(-2)^2 - 9} = \frac{0}{-5} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ g je zvezna v } x=-2$$

3

1

• g je zvezna v $x=2$, če je
$$g(2) = \lim_{x \downarrow 2} g(x).$$

$$g(2) = f(2) = \frac{2^3 - 4\cdot 2}{2^2 - 9} = \frac{0}{-5} = 0$$

$$\lim_{x\downarrow 2} g(x) = \lim_{x \downarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} \underset{\downarrow\ \text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\downarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-2)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

$$= \lim_{x \downarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{2-2}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$$

g je zvezna v $x=2$

5

1