Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Osnove matematične analize: prvi kolokvij

30. november 2022

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Uporaba kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

a) (9 točk) Poišči vse rešitve enačbe

$$z^3 = i.$$

$z = re^{i\varphi}$

$z^3 = r^3 e^{i \cdot 3\varphi}$

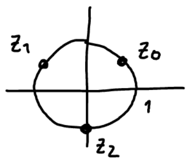
$i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

$r^3 = 1$ $\qquad 3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\underline{\underline{r = 1}}$ $\qquad \underline{\underline{\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}}}$, $k = 0, 1, 2$

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ $\qquad z_1 = e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$ $\qquad z_2 = e^{i \cdot \frac{9\pi}{6}}$

$30°$ $\qquad 150°$ $\qquad 270°$



b) (8 točk) Določi tako število $\alpha \in \mathbb{C}$, da bo veljalo

$$(z^3 - \alpha)(z - \overline{z}) = z^4 - z^3\overline{z} - iz + i\overline{z}$$

za vse $z \in \mathbb{C}$.

$z^4 - \overline{z}z^3 - \alpha z + \alpha\overline{z} = z^4 - z^3\overline{z} - iz + i\overline{z}$

$(i - \alpha)z + (\alpha - i)\overline{z} = 0$

$(i - \alpha)(z - \overline{z}) = 0 \leftarrow$ res za vse $z \in \mathbb{C}$,

tudi za tiste, kjer $z \neq \overline{z}$

$\Rightarrow i - \alpha = 0$

$\underline{\underline{\alpha = i}}$

c) (8) Poišči vse rešitve enačbe.
Namig: Uporabi rezultat prejšnje točke.

$$z^4 - z^3\overline{z} - iz + i\overline{z} = 0$$

$(z^3 - i)(z - \overline{z}) = 0$

$z^3 = i$ $\qquad\qquad z = \overline{z}$

$\underline{\underline{z_0, z_1 \text{ in } z_2 \text{ iz a)}}}$ $\qquad \Rightarrow \underline{\underline{z \in \mathbb{R}}}$

Rešitve so z_0, z_1, z_2 iz a) in vsa realna števila.

2. naloga (25 točk)

Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano rekurzivno:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = -\sqrt{3-2a_n}\ .$$

a) (10 točk) Z uporabo matematične indukcije dokaži, da je zaporedje padajoče.

$a_0 = \underline{1}$, $a_1 = -\sqrt{3-2} = -\sqrt{1} = \underline{-1}$ $\quad a_2 = -\sqrt{3+2} = -\sqrt{5} = \underline{-2}, \dots$

Je padajoče $\Leftrightarrow$ $a_{n+1} < a_n$.

Baza: $n=1$ $\quad a_1 < a_0$?

$-1 < 1$ ✓

Ind. korak: vemo: $a_n < a_{n-1}$ $\mid \cdot(-2)$ (RBV: $a_{n+1} < a_n$?)

$-2a_n > -2a_{n-1}$ $\mid +3$

$3-2a_n > 3-2a_{n-1}$ $\mid \sqrt{\ }$

$\sqrt{3-2a_n} > \sqrt{3-2a_{n-1}}$ $\mid \cdot(-1)$

$-\sqrt{\dots} < -\sqrt{\dots}$

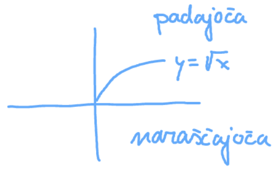
$\underline{a_{n+1} < a_n}$

OK, če je

$3-2a_{n-1} \geq 0$

$2a_{n-1} \leq 3$

$a_{n-1} \leq \frac{3}{2}$



b) (10 točk) Z uporabo matematične indukcije dokaži, da je zaporedje navzdol omejeno.

Iz c): -3 je sp. meja

$a_n > -3$

Baza: $a_0 > -3$?

$1 > -3$ ✓

Ind. korak: vemo: $a_n > -3$ $\mid \cdot(-2)$ (RBV: $a_{n+1} > -3$)

$-2a_n < 6$ $\mid +3$

$3-2a_n < 9$ $\mid \sqrt{\ }$

$\sqrt{3-2a_n} < 3$ $\mid \cdot(-1)$

$-\sqrt{3-2a_n} > -3$

$\underline{a_{n+1} > -3}$

OK, če je

$3-2a_n \geq 0$

$(a_n \leq \frac{3}{2})$

c) (5 točk) Izračunaj limito zaporedja a_n.

Kandidati za limito: $a = -\sqrt{3-2a}$ $\mid {}^{\wedge}2$

$a^2 = 3-2a$

$a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$

$\underline{a_1 = -3}$ $\qquad$ $\underline{a_2 = 1}$

$\to a_1 < 1$ in padajoče $\to$ $\underline{\text{ta ni OK}}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{-3}$

3. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Z uporabo korenskega, kvocientnega ali primerjalnega kriterija ugotovi, ali spodnji vrsti konvergirata ali divergirata.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{2n} \right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

korenski

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{3n+4}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2} > 1$$

divergira

kvocientni

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n!)^2}{n^n((n+1)!)^2} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)^2} =$$

$$= \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$$

konvergira

b) (5 točk) Dana je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(2x+1)^n$. Za katere vrednosti $x \in \mathbb{R}$ dana vrsta konvergira?

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot (2x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (4x+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \dots = q(1+q+q^2+\dots) = \frac{q}{1-q}$$

$q = 4x+2$

$|q| < 1$

$|4x+2| < 1$

$4x+2 \geq 0$

$4x \geq -2$

$x \geq -\frac{1}{2}$

$4x+2 < 1$

$4x < -1$

$x < -\frac{1}{4}$

$x \in [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

$x < -\frac{1}{2}$

$-4x-2 < 1$

$-4x < 3$

$x > -\frac{3}{4}$

$x \in (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$

$(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$

$\Rightarrow$ Konvergira za $x \in (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$.

c) (5 točk) Za vrsto iz b) poišči še tak $x \in \mathbb{R}$, da bo vsota vrste enaka 2.

$$\frac{q}{1-q} = 2$$

$$\frac{4x+2}{1-4x-2} = 2$$

$$\frac{4x+2}{-1-4x} = 2$$

$$4x+2 = -2-8x$$

$$12x = -4$$

$$x = -\frac{4}{12}$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

✓

4. naloga (25 točk)

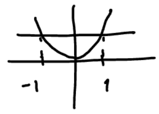
Naj bo

$$f(x) = \arctan(\log(x^2 - 1))$$

a) (8 točk) Določi definicijsko območje D_f funkcije f. Ali je f injektivna?

$D_{arctg} = \mathbb{R}$ $\quad D_{log} = (0,\infty) = \mathbb{R}^+$ $\quad x^2-1>0$

$x^2 > 1$



$\underline{\underline{x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)}}$

f $\underline{\underline{\text{ni}}}$ injektivna, ker je $f(-x) = f(x)$ (je soda), torej je npr. $\underline{\underline{f(2) = f(-2) \text{ in } 2 \neq -2}}$

b) (8 točk) Omejimo definicijsko območje funkcije f na $x \in (1, \infty)$. Določi inverz funkcije f glede na to definicijsko območje.

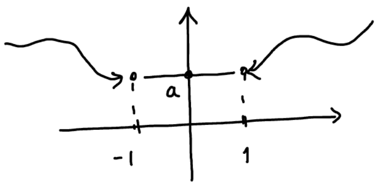
$$x = \operatorname{arctg}(\log(y^2-1)) \quad / \operatorname{tg}$$
$$\operatorname{tg} x = \log(y^2-1) \quad / \exp$$
$$e^{\operatorname{tg} x} = y^2 - 1$$
$$y^2 = e^{\operatorname{tg} x} + 1$$
$$y = \pm\sqrt{e^{\operatorname{tg} x}+1}$$

$x \in (1,\infty) = D_f = Z_{f^{-1}}$, zato $+$ $\quad \underline{\underline{f^{-1}(x) = \sqrt{e^{\operatorname{tg} x}+1}}}$

c) (9 točk) Definirajmo še funkcijo

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & : \; x \in D_f \\ a & : \; x \notin D_f \end{cases}$$

za dano konstanto $a \in \mathbb{R}$. Ali je možno določiti tako vrednost konstante a, da bo g zvezna funkcija?



$$g(x) = \begin{cases} f(x) \; ; & x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \\ a \; ; & x \in [-1,1] \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = \lim_{x \nearrow -1} \operatorname{arctg}\Big(\underbrace{\log(\overbrace{x^2-1}^{\to 0})}_{\to -\infty}\Big) = \underline{\underline{-\tfrac{\pi}{2}}}$$

$\to -\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = -\tfrac{\pi}{2} \quad (\text{ker je } f \text{ soda})$$

$\Rightarrow$ Za $\underline{\underline{a = -\frac{\pi}{2}}}$ bo g zvezna.