Digitalna vezja
UL, FRI

Vaja 5 Funkcijsko poln sistem, Zaprti razredi

Funkcijsko poln sistem – prevedba na OR, AND, NOT

Nabor operatorjev je funkcijsko poln, če z njim lahko izrazimo vsako funkcijo.

Nabor operatorjev disjunkcije, konjunkcije in negacije {OR, AND, NOT}, $\{\vee, ., ^{-}\}$, je funkcijsko poln sistem (operator $^{-}$ predstavlja negacijo).

1- Funkcijsko polnost ugotavljamo s pretvorbo na znan funkcijsko poln sistem $\{\vee, ., ^{-}\}$.

Zgled:

S pretvorbo na negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo pokaži, da je **Peircov** operator ($\downarrow$) funkcijsko poln sistem.

Negacija (NOT):

$$\bar{x} = \overline{x \vee x} = x{\downarrow}x$$

Disjunkcija (OR):

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = \overline{x_1{\downarrow}x_2} = (x_1{\downarrow}x_2){\downarrow}(x_1{\downarrow}x_2)$$

Konjunkcija (AND):

$$x_1 . x_2 = \overline{\overline{x_1 . x_2}} = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} = (x_1{\downarrow}x_1){\downarrow}(x_2{\downarrow}x_2)$$

Funkcijsko poln sistem – pripadnost osnovnim zaprtim razredom

- Osnovni **zaprti razredi**:
  - T_0 - razred preklopnih funkcij, ki ohranjajo ničlo
  - T_1 - razred preklopnih funkcij, ki ohranjajo enico
  - S – razred sebidualnih funkcij
  - L – razred linearnih funkcij
  - M – razred monotonih funkcij

- **Funkcijska polnost nabora** preklopnih funkcij - preverjamo jo s **pripadnostjo osnovnim zaprtim razredom** (Postov teorem funkcijske polnosti).
  - Nabor **je POLN**, če **odpira** vse osnovne razrede.
  - Nabor odpira osnovni razred, če **vsaj ena funkcija NE** pripada temu razredu.

- Dokaz pripadnosti se lahko preverja na več načinov:
  - Analitično
  - Tabelarično
  - S Karnaughjevim diagramom

Zgled: Preverjanje funkcijske polnosti nabora $\{\rightarrow, 1\}$

$f(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	1	$f(x_1, x_2)$
0	0	1	1	$f(0,0)$
0	1	1	1	$f(0,1)$
1	0	0	1	$f(1,0)$
1	1	1	1	$f(1,1)$

1) Razred T_0:

$$\boldsymbol{f(0, 0, \dots, 0) = 0}$$

$\rightarrow$: $f(0,0) = \overline{0} \vee 0 = 1$ $\boxed{\rightarrow \notin T_0}$

1: $1 \neq 0$ $\boxed{1 \notin T_1}$

2) Razred T_1:

$$\boldsymbol{f(1, 1, \dots, 1) = 1}$$

$\rightarrow$: $f(1,1) = \overline{1} \vee 1 = 1$ $\boxed{\rightarrow \in T_0}$

1: $1 = 1$ $\boxed{1 \in T_1}$

3) Razred L: $\boldsymbol{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L,}$

$$\boldsymbol{f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \nabla a_1 . x_1 \nabla a_2 . x_2 \nabla \dots \nabla a_n . x_n}$$

I. ***Analitično:***

1. Predpostavimo, da funkcija $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ spada v razred L.
2. Določimo koeficiente $a_0, a_1, \dots, a_n$.
3. Preverimo ali se dobljena funkcija $a_0 \nabla a_1 . x_1 \nabla a_2 . x_2 \nabla \dots \nabla a_n . x_n$ ujema s podano funkcijo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

→: 1) $f(x_1, x_2)_L = x_1 \to x_2 = a_0 \nabla a_1 . x_1 \nabla a_2 . x_2$

2.) $f(0,0)_L = a_0 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 0 = 1 \qquad (a_0 = 1)$

$f(0,1)_L = 1 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 1 = 1 \nabla a_2 = 1 \qquad (a_2 = 0)$

$f(1,0)_L = 1 \nabla a_1 . 1 \nabla a_2 . 0 = 1 \nabla a_1 = 0 \qquad (a_1 = 1)$

$$f(x_1, x_2)_L = 1 \nabla 1 . x_1 \nabla 0 . x_2 = 1 \nabla x_1$$

3) preverimo za vhodni vektor $f(1,1)_L$ (v primeru protislovja zaključimo postopek)

$$f(1,1) = \overline{1} \vee 1 = 1$$

$$f(1,1)_L = 1 \nabla x_1 = 1 \nabla 1 = 0$$

$f(1,1) \neq f(1,1)_L$

$\boxed{\to \notin \text{L}}$

4) Razred S: $\overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Analitično: $f(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = f(x_1, x_2)$

$\rightarrow$: $f(\overline{x_1}, \overline{x_2}) = x_1 \rightarrow x_2$

$\overline{\overline{\overline{x_1}} \vee \overline{x_2}} = \overline{x_1} \vee x_2$

$\overline{x_1}.x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$ (preverimo enakost)

$\overline{x_1}.x_2 = \overline{x_1}.(x_2 \vee \overline{x_2}) \vee x_2(x_1 \vee \overline{x_1})$ (desno stran dopolnimo do PDNO)

$\overline{x_1}.x_2 = \overline{x_1}.x_2 \vee \overline{x_1}.\overline{x_2} \vee x_1.x_2 \vee \overline{x_1}.x_2$

$\overline{x_1}.x_2 = \overline{x_1}.x_2 \vee \overline{x_1}.\overline{x_2} \vee x_1.x_2$

$\vee^2(1) \neq \vee^2(0,1,3)$

$\boxed{\rightarrow \notin S}$

Tabelarično: $f(\vec{w}_i) \neq f(\vec{w}_{2^n-1-i})$

$\rightarrow$: $f(w_0) = f(w_3)$

$f(0,0) = f(1,1)$, protiprimer

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	$f(x_1, x_2)$
0	0	1	$f(w_0)$
0	1	1	$f(w_1)$
1	0	0	$f(w_2)$
1	1	1	$f(w_3)$

1: $\overline{1} = 1$,

$0 \neq 1$ (protislovje)

$\boxed{1 \notin S}$

5) Razred M: $\boldsymbol{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M,}$

$$\boldsymbol{\forall\, i, j,\ \vec{w}_i < \vec{w}_j \rightarrow f(\vec{w}_i) \le f(\vec{w}_j)}$$

Za w_i in w_j velja, da je $\boldsymbol{w_i < w_j}$, če za vsako mesto k velja $\boldsymbol{w_{k,i} \le w_{k,j}}$ (na vseh istoležnih bitih velja $\le$).

Za preverjanje pripadnosti monotonosti **primerjamo sosedne vektorje** (razlikujeta se samo na enem mestu).

Primer: za n= 4, w_0 : (0,0,0,0)

w_4 : (0,1,0,0) $\quad w_0 < w_4$

tabelarično →:

Sosedni vektorji:

$w_0 < w_1, w_0 < w_2$

$w_1 < w_1$

$w_2 < w_3$

	x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	$f(x_1, x_2)$
w_0	0	0	**1**	$\boldsymbol{f(w_0)}$
w_1	0	1	1	$f(w_1)$
w_2	1	0	**0**	$\boldsymbol{f(w_2)}$
w_3	1	1	1	$f(w_3)$

V tabeli ugotovimo, da je $\quad w_0 < w_2, f(w_0) \nleq f(w_2)$

$$(0{,}0) < (1{,}0)\ ;\ f(0{,}0) \nleq f(1{,}0)$$

$\rightarrow \notin$ M

Ugotovili smo, da nabor $\{\rightarrow, 1\}$ **NI** funkcijsko poln:

Razreda T_1 NE odpre nobena funkcija.

Pri vseh ostalih razredih je vsaj ena funkcija, ki razredu ne pripada.

Zapišemo rezultate preverjanja v tabeli.

	T_0	T_1	S	L	M
$\rightarrow$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
1	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

Kako bomo dopolnili nabor operatorjev, da bo funkcijsko poln?

Dodamo operator negacije ali konstanto 0, ker ena in druga odpirata razred T_1, in dobimo funkcijsko poln sistem.

Zgled: Preverjanje pripadnosti zaprtim razredom

- Preklopna funkcija $f(x_1, x_2, x_3) = \vee^3 (0,3,4,6)$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Pripadnost razredu T_0: $f(0,0,0) = 1 \Rightarrow f \notin T_0$

Pripadnost razredu T_1: $f(1,1,1) = 0 \Rightarrow f \notin T_1$

Pripadnost razredu sebidualnih funkcij S:

protiprimer: $f(0,1,0) = f(1,0,1) \Rightarrow f \notin S$

Pripadnost razredu monotonih funkcij M:

protiprimer: $(1,1,0) < (1,1,1)$; $f(1,1,0) \nleq f(1,1,1) \Rightarrow f \notin M$

Pripadnost razredu L (analitično)

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

f$(x_1, x_2, x_3)_L = a_0 \nabla a_1 . x_1 \nabla a_2 . x_2 \nabla a_3 . x_3$		f$(x_1, x_2, x_3)_L$
f$(0,0,0)_L = a_0 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 0 \nabla a_3 . 0 = 1$	$a_0 = 1$	1
f$(0,0,1)_L = 1 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 0 \nabla a_3 . 1 = 0$	$1 \nabla a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 1$	0
f$(0,1,0)_L = 0 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 1 \nabla a_3 . 0 = 0$	$1 \nabla a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 1$	0
		1
f$(1,0,0)_L = 1 \nabla a_1 . 1 \nabla a_2 . 0 \nabla a_3 . 0 = 1$	$1 \nabla a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$	1
		0
		0
		1

f$(x_1, x_2, x_3)_L = 1 \nabla 0 . x_1 \nabla 1 . x_2 \nabla 1 . x_{3.} = 1 \nabla x_2 \nabla x_3$

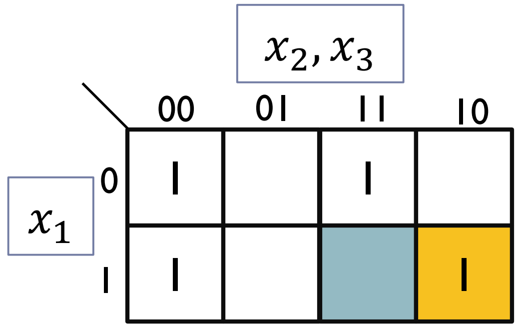
Preverimo preostale vhodne vektorje - vstavimo zapis funkcije f$(x_1, x_2, x_3)_L$ v tabelo.

$$f(1,1,0) = 1$$

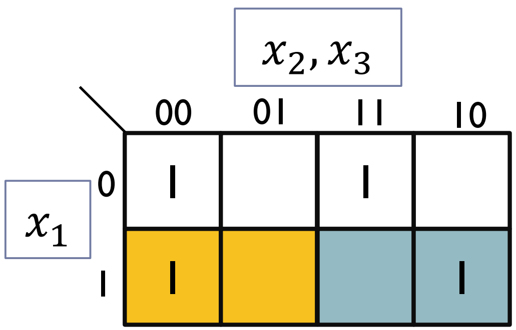
$$f(1,1,0)_L = 1 \nabla 1 \nabla 0 = 0$$

$$f(1,1,0) \neq f(1,1,0)_L \Rightarrow f \notin L$$

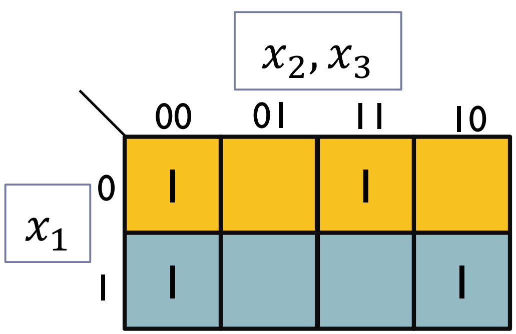
Pripadnost razredu linearnih funkcij L - s **Karnaughjevim diagramom** (pokritja)



$x_1 . x_2 . x_3 \;:\; x_1 . x_2 . \overline{x_3}$ (popolnoma različna)



$x_1 . x_2 \;:\; x_1 . \overline{x_2}$ (popolnoma različna)



$\boldsymbol{x_1} \;:\; \boldsymbol{\overline{x_1}}$ (niti popolnoma različna, niti popolnoma enaka)

Naloga:

1)

S pretvorbo na negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo pokaži, da je nabor operatorjev XOR, AND in konstanta 1 $(\nabla, ., 1)$ funkcijsko poln sistem.

2)

Podana je preklopna funkcija $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vee^4 (1, 2, 5, 6, 8, 11, 12, 15)$. Preveri:

a) Tabelarično - pripadnost zaprtim razredom T_0, T_1, S in M.
b) pripadnost razredu L pa analitično in s Karnaughjevim diagramom.

Naloga 1 (Rešitev):

Funkcija XOR: $x_1 \nabla x_2 = \overline{x_1}.x_2 \vee x_1.\overline{x_2}$

Pretvorba na znan sistem:

Negacija (NOT): negacijo je potrebno zapisati z operatorjem XOR in konstanto 1.

$$\bar{x} = \bar{x}.1 \vee x.0 = x \nabla 1$$

Konjunkcija (AND) je že v naboru operatorjev.

Disjunkcija (OR):

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = \overline{\overline{x_1}.\overline{x_2}} = \overline{(x_1 \nabla 1).(x_2 \nabla 1)} = ((x_1 \nabla 1).(x_2 \nabla 1)) \nabla 1$$

Naloga 2 (Rešitev):

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Pripadnost razredu T_0:

$f(0,0,0,0) = 0 \Rightarrow f \in T_0$

Pripadnost razredu T_1:

$f(1,1,1,1) = 1 \Rightarrow f \in T_1$

Pripadnost razredu sebidualnih funkcij S:

Protiprimera ni $\Rightarrow f \in S$

Pripadnost razredu monotonih funkcij M:

Protiprimer:

$$(0,0,1,0) < (0,0,1,1);$$

$$f(0,0,1,0) \nleq f(0,0,1,1) \Rightarrow f \notin M$$

Pripadnost razredu linearnih funkcij L:

f$(x_1,x_2,x_3,x_4)_L = a_0 \nabla a_1 . x_1 \nabla a_2 . x_2 \nabla a_3 . x_3 \nabla a_4 . x_4$

f$(0,0,0,0)_L = a_0 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 0 \nabla a_3 . 0 \nabla a_4 . 0 = 0 \quad \Rightarrow a_0 = 0$

f$(0,0,0,1)_L = 0 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 0 \nabla a_3 . 0 \nabla a_4 . 1 = 1 \quad \Rightarrow 0 \nabla a_4 = 1 \Rightarrow a_4 = 1$

f$(0,0,1,0)_L = 0 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 0 \nabla a_3 . 1 \nabla a_4 . 0 = 1 \quad \Rightarrow 0 \nabla a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 1$

f$(0,1,0,0)_L = 0 \nabla a_1 . 0 \nabla a_2 . 1 \nabla a_3 . 0 \nabla a_4 . 0 = 0 \quad \Rightarrow 0 \nabla a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

f$(1,0,0,0)_L = 0 \nabla a_1 . 1 \nabla a_2 . 0 \nabla a_3 . 0 \nabla a_4 . 0 = 1 \quad \Rightarrow 0 \nabla a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$

f$(x_1,x_2,x_3,x_4)_L = 0 \nabla 1 . x_1 \nabla 0 . x_2 \nabla 1 . x_3 \nabla 1 . x_4 = x_1 \nabla x_3 \nabla x_4$

Preverimo preostale vhodne vektorje - vstavimo zapis funkcije f$(x_1,x_2,x_3)_L$ v tabelo.

$\Rightarrow f \in L$

Naloga 2 (Rešitev):

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$	$f(x_1,x_2,x_3,x_4)_L$
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Za vse vhodne vektorje velja enakost

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=f(x_1,x_2,x_3,x_4)_L$$

$$\Rightarrow f \in L$$

Pripadnost razredu linearnih funkcij L – Karnaughjev diagram

x_1, x_2 \ x_3, x_4	00	01	11	10
00		1		1
01		1		1
11	1		1	
10	1		1	

x_1, x_2 \ x_3, x_4	00	01	11	10
00		1		1
01		1		1
11	1		1	
10	1		1	

x_1, x_2 \ x_3, x_4	00	01	11	10
00		1		1
01		1		1
11	1		1	
10	1		1	

x_1, x_2 \ x_3, x_4	00	01	11	10
00		1		1
01		1		1
11	1		1	
10	1		1	

Preverjanje gre preko vseh vektorjev, povsod je popolna enakost ali popona različnost

$$\Rightarrow f \in L$$