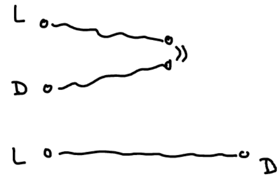
Diskretne strukture UNI
Vaje, 3. teden

1. * Prepričaj se, da so spodnji pari izjavnih izrazov enakovredni. Nalogo reši s pomočjo resničnostne tabele in s poenostavljanjem.



(a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$ in $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$

p	q	r	$(p \Rightarrow q)$ (1.)	$\Leftrightarrow$ (3.)	$(p \Rightarrow r)$ (2.)	$p \Rightarrow$ (2.)	$(q \Leftrightarrow r)$ (1.)
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

sta enakovredna

$\boxed{a \Rightarrow b \sim \neg a \vee b}$

$\boxed{a \Leftrightarrow b \sim (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)}$

$\boxed{a \Leftrightarrow b \sim (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)}$

$\boxed{\neg(a \vee b) \sim \neg a \wedge \neg b}$ $\boxed{\neg\neg a \sim a}$

$\boxed{\neg(a \wedge b) \sim \neg a \vee \neg b}$

$$L = (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \sim (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee r) \sim (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \vee \neg(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee r)$$

$\neg\neg p \wedge \neg q$ $\quad \neg\neg p \wedge \neg r$

$$\sim (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \vee (p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg r) \sim$$

$ab + ac = a(b+c)$

$a \wedge b \vee a \wedge c \sim a \wedge (b \vee c)$

$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \sim a \vee (b \wedge c)$

$$\sim \neg p \vee (q \wedge r) \vee \underbrace{p \wedge \neg q \wedge p \wedge \neg r}_{\underbrace{p \wedge p \wedge \neg q \wedge \neg r}_{p \wedge \neg q \wedge \neg r}}$$

$\boxed{a \wedge (b \wedge c) \sim (a \wedge b) \wedge c \sim a \wedge b \wedge c}$

$\boxed{a \wedge b \sim b \wedge a}$ $\boxed{a \wedge a \sim a}$

$\boxed{1 \wedge a \sim a}$

$$\sim \neg p \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

$$D = p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r) \sim \neg p \vee (q \Leftrightarrow r) \sim \neg p \vee ((q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)) \sim$$

$$\sim \neg p \vee (q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \sim \star$$

$\boxed{b \wedge c \sim (a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c)}$

$$\sim \neg p \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

$(a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \sim$

$\underbrace{(a \vee \neg a)}_{1} \wedge b \wedge c \sim 1 \wedge b \wedge c \sim$

$\sim b \wedge c$

$$\sim \neg p \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \qquad L = D \checkmark$$

(b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q)$ in $\neg p$

$\boxed{a \vee (a \wedge b) \sim a}$ $\star$

$\boxed{a \wedge (a \vee b) \sim a}$

$$L = (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg q) \sim (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \sim$$

$$\sim (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee \neg q) \sim$$

$\boxed{a \wedge \neg a \sim 0}$ $\boxed{a \vee \neg a \sim 1}$

$\boxed{a \vee 0 \sim a}$ $\boxed{a \wedge 0 \sim 0}$

$$\sim \neg p \vee (\underbrace{\cancel{q \wedge \neg q}}_{0}) \vee (p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge q) \sim$$

$$\sim \neg p \vee (p \wedge p \wedge q \wedge \neg q) \sim \neg p \vee 0 \sim \neg p = D$$

$p \wedge 0$

0

$\underline{\underline{L = D}}$

3. * Ali obstaja tak izraz I, odvisen le od spremenljivk p in q, da bo

(a) izraz $(p \Rightarrow (I \wedge q)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \Rightarrow I)$ protislovje?

(b) izraz $(p \Rightarrow (I \wedge q)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \Rightarrow I)$ tavtologija?

Za vsako možno rešitev poišči vsaj en izraz I.

$I = p \wedge \neg q \Rightarrow (\neg p \vee q)$

$I = p \vee q$

a)

$\square$ T

$\bigcirc$ P $\perp$

p	q	I	$p \Rightarrow$ (2.)	$I \wedge q$ (1.)	$\Leftrightarrow$ (5.)	$p \vee q$ (3.)	$\Rightarrow I$ (4.)
0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

$(p \Rightarrow I \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow I) = X$

p	q	I
0	0	?
0	1	0
1	0	1
1	1	?

Pri $p \sim q \sim 0$, bo imel X vrednost 1 ne glede na vrednost I. Torej X ne bo protislovje. Tak I ne obstaja.

b)

p	q	I	I_1	I_2	I_3	I_4
0	0	0 ali 1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	1	0 ali 1	0	0	1	1

$I_1 = \neg(q \Rightarrow p)$

$I_1 = \neg p \wedge q$

$I_2 = \neg p$

$I_3 = q$

$I_4 = p \Rightarrow q$

$q \sim q \wedge q \wedge q \vee 0$

$q \sim q \wedge 1 \sim q \wedge (p \vee \neg p)$

$\neg(q \Rightarrow p) \sim \neg(\neg q \vee p) \sim q \wedge \neg p \sim \neg p \wedge q$

4. Ali obstaja tak izraz I, v katerem nastopajo spremenljivke p, q in r, da bo

   (a) izraz $(p \Rightarrow (I \wedge r)) \Leftrightarrow ((q \vee \neg r) \Rightarrow I)$ tavtologija?

   (b) izraz $(p \Rightarrow (I \wedge r)) \Leftrightarrow ((q \vee \neg r) \Rightarrow I)$ nevtralen?

6. * Poišči izjavni izraz X, ki ima v resničnostni tabeli tak stolpec logičnih vrednosti:

(a) 01000111,

(b) 01010000.

Dobljena izraza poenostavi.

disjunktivna normalna oblika

osnovne konjunkcije

a)

p	q	r	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$DNO(X) = \big((\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)\big) \vee \big((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)\big)$$

$$KNO(X) = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$$

konjunktivna n.o.

osnovne disjunkcije

$$DNO(X) = \underbrace{\cancel{(\neg p \vee p)}}_{1} \wedge \neg q \wedge r \quad \vee \quad p \wedge q \wedge \underbrace{\cancel{(\neg r \vee r)}}_{1}$$

$a \vee \neg a \sim 1$

$\boxed{a \wedge 1 \sim a}$

$$\sim (\neg q \wedge r) \vee (p \wedge q)$$

$$KNO(X) \sim \Big(\underbrace{\cancel{(p \wedge \neg p)}}_{0} \vee q \vee r\Big) \wedge \Big(p \vee \neg q \vee \underbrace{\cancel{(r \wedge \neg r)}}_{0}\Big)$$

$a \wedge \neg a \sim 0$

$\boxed{a \vee 0 \sim a}$

$(a \vee b) \wedge (c \vee d) = (a \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge d)$

$\vee \quad \wedge \quad \vee$

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

$\wedge \quad \vee \quad \wedge$

$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) = (a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d)$

$$\sim (q \vee r) \wedge (p \vee \neg q) \sim$$

$$\sim (q \wedge p) \vee \overbrace{\cancel{(q \wedge \neg q)}}^{0} \vee (r \wedge p) \vee (r \wedge \neg q) \sim$$

$$\sim (\neg q \wedge r) \vee (p \wedge q) \vee (r \wedge p) \sim$$

$$\sim (\neg q \wedge r) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \sim \underline{\underline{(\neg q \wedge r) \vee (p \wedge q)}}$$

$\sim DNO(X)$

7. * Kateri izmed spodaj naštetih naborov izjavnih veznikov so polni?

Def. Nabor veznikov je poln, če lahko s temi vezniki zapišemo vse izraze izjavnega računa.

Primer. $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \Rightarrow\}$ so polni nabori

$\neg(a \wedge b) \sim \neg a \vee \neg b \;/\; \neg$

$a \wedge b \sim \neg(\neg a \vee \neg b)$

Izrek. Če je $\mathcal{P}$ poln nabor in lahko vse veznike iz $\mathcal{P}$ izrazimo z vezniki iz $\mathcal{N}$, potem je tudi $\mathcal{N}$ poln nabor.

(a) $\{\Rightarrow, \wedge\}$

Izrek. Če vsi vezniki iz nabora $\mathcal{N}$ ohranjajo konstanto (0 ali 1), potem $\mathcal{N}$ ni poln.

$0 \Rightarrow 0 \sim 1$
$0 \wedge 0 \sim$ } ne ohranja 0

$1 \Rightarrow 1 \sim 1$
$1 \wedge 1 \sim 1$ } Nabor ohranja 1, zato ni poln.

$(p \Rightarrow p \wedge q) \Rightarrow r \wedge z \sim 1$ (1, 1, 1, 1, 1)

Tega ne moremo izraziti z $\{\Rightarrow, \wedge\}$: $\neg p$ (1 → 0)

(b) $\{\Leftrightarrow, \wedge\}$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \wedge q$
0	0	1	0
1	1	1	1

→ Ohranja 1, ni poln.

Primer. $\{\neg, \Leftrightarrow\}$ ne ohranja 0 in 1, ampak ni poln.

(c) $\{\Leftrightarrow, \wedge, 0\} = \mathcal{N}$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \wedge q$	0
0	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Ne ohranja 0.
Ne ohranja 1.

Nabor ne ohranja niti 0 niti 1. Mogoče je poln. Ne vemo.

$\mathcal{N}$ je poln? Dokaz: $\mathcal{P} = \{\neg, \wedge\}$ izrazimo z $\mathcal{N}$:

p	$p \Leftrightarrow 0$	$\neg p$
0	1	1
1	0	0

- $\neg p \sim p \Leftrightarrow 0$ ✓
- $p \wedge q \sim p \wedge q$ ✓ (iz $\mathcal{P}$, iz $\mathcal{N}$)

} $\Rightarrow$ $\mathcal{N}$ je poln.

(d) $\{\uparrow\}$

(e) $\{\downarrow\}$

(f) $\{A\}$, kjer je $A(p, q, r) \sim p \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$

(g) $\{A, 1\}$, kjer je $A(p, q, r) \sim p \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg r)$