Definicije limitnih obnašanj zaporedij in funkcij

Namen tega zapisa je strnjena predstavitev premnogih definicij limitnih obnašanj. Ideja je, da bi taka oblika pripomogla k primerjavi matematično zapisanih definicij ter posledično lažjemu razumevanju omenjenih pojmov. Definicije se seveda ujemajo s tistimi iz predavanj, čeprav so včasih zapisano malce drugače. Oznake: a_n predstavlja zaporedje realnih števil, $f\colon X \to Y$ je funkcija.

Osnovna ideja: predpis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ pomeni, da se vrednosti $f(x)$ približujejo številu b, ko se argument x približuje a. Če namesto a ali b vstavimo ∞ ali $-\infty$ ne gre več za približevanje številu ampak za rast (padanje) preko (pod) vsake meje.

Tehnični komentar: Oznaka $\forall\varepsilon > 0$ se ponavadi nanaša na pogoj, ki ga je ob manjših ε težje zadostiti (vedno ob končni limiti b). Zato se razume, da je bistvo pogoja (ki sledi taki izbiri ε) v tem, da velja za poljubno majhna števila ε. Podobno se $\forall M > 0$ ponavadi nanaša na pogoj, ki ga je ob večjih M težje zadostiti (vedno ob rasti/padanju preko vseh mej, t.j. b zamenjamo z ∞ ali $-\infty$). Zato je v tem primeru bistvo pogoja, de velja za poljubno velike N.

Limita zaporedja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \Leftrightarrow \overbrace{\forall\varepsilon > 0}^{\textit{za poljubno natančnost (bližino) } \varepsilon} \underbrace{\exists N \in \mathbb{R}:}_{\textit{obstaja indeks} N \textit{, da se}} \left(\overbrace{n \geq N}^{\textit{členi od } a_N \textit{ dalje}} \Rightarrow \underbrace{|a_n - b| < \varepsilon}_{\textit{od } b \textit{ razlikujejo za največ } \varepsilon} \right)$$

Rast zaporedja preko vsake meje:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \overbrace{\forall M > 0}^{\textit{za poljubno veliko število } M} \underbrace{\exists N \in \mathbb{R}:}_{\textit{obstaja indeks} N \textit{, da so}} \left(\overbrace{n \geq N}^{\textit{členi od } a_N \textit{ dalje}} \Rightarrow \underbrace{a_n > M}_{\textit{večji od } M} \right)$$

Padanje zaporedja pod vsako mejo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \overbrace{\forall M > 0}^{\textit{za poljubno veliko število } M} \underbrace{\exists N \in \mathbb{R}:}_{\textit{obstaja indeks} N \textit{, da so}} \left(\overbrace{n \geq N}^{\textit{členi od } a_N \textit{ dalje}} \Rightarrow \underbrace{a_n < -M}_{\textit{manjši od } -M} \right)$$

Limita funkcije v točki:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \overbrace{\forall\varepsilon > 0}^{\textit{za poljubno natančnost (bližino) } \varepsilon} \underbrace{\exists \delta > 0:}_{\textit{obstaja bližina } \delta \textit{, da se}} \left(\overbrace{|x - a| < \delta, x \neq a}^{\textit{za vsak } x \textit{, ki je od } a \textit{ oddaljen za največ } \delta} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - b| < \varepsilon}_{f(x) \textit{od } b \textit{ razlikujejo za največ } \varepsilon} \right)$$

Limita funkcije v neskončnosti (podobno velja za $-\infty$); ekvivalentna je limiti zaporedja:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \overbrace{\forall\varepsilon > 0}^{\textit{za poljubno natančnost (bližino) } \varepsilon} \underbrace{\exists N \in \mathbb{R}:}_{\textit{obstaja število} N \textit{, da je}} \left(\overbrace{x \geq N}^{\textit{za je vsak } x \textit{, ki je večji od } N} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - b| < \varepsilon}_{f(x) \textit{od } b \textit{ razlikujejo za največ } \varepsilon} \right)$$

Leva limita funkcije v točki:

$$\lim_{x\nearrow a} f(x)=b \Leftrightarrow \overbrace{\forall\varepsilon>0}^{\textit{za poljubno natančnost (bližino) } \varepsilon} \quad \underbrace{\exists\delta>0:}_{\textit{obstaja bližina } \delta, \textit{ da se}} \quad \Big(\overbrace{a-\delta<x<a}^{\textit{za vsak } x, \textit{ ki je največ za } \delta \textit{ levo od } a} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{|f(x)-b|<\varepsilon}_{f(x) \textit{od } b \textit{ razlikujejo za največ } \varepsilon} \Big)$$

Desna limita funkcije v točki:

$$\lim_{x\searrow a} f(x)=b \Leftrightarrow \overbrace{\forall\varepsilon>0}^{\textit{za poljubno natančnost (bližino) } \varepsilon} \quad \underbrace{\exists\delta>0:}_{\textit{obstaja bližina } \delta, \textit{ da se}} \quad \Big(\overbrace{a<x<a+\delta}^{\textit{za vsak } x, \textit{ ki je največ za } \delta \textit{ desno od } a} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{|f(x)-b|<\varepsilon}_{f(x) \textit{od } b \textit{ razlikujejo za največ } \varepsilon} \Big)$$

Rast funkcije preko vsake meje v polu (podobno velja za padanje pod vsako mejo):

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \Leftrightarrow \overbrace{\forall M>0}^{\textit{za poljubno veliko število } M} \quad \underbrace{\exists\delta>0:}_{\textit{obstaja bližina } \delta, \textit{ da se}} \quad \Big(\overbrace{|x-a|<\delta, x\neq a}^{\textit{za vsak } x, \textit{ ki je od } a \textit{ oddaljen za največ } \delta} \quad \Rightarrow \underbrace{f(x)>M}_{f(x) \textit{večji od } M} \Big)$$

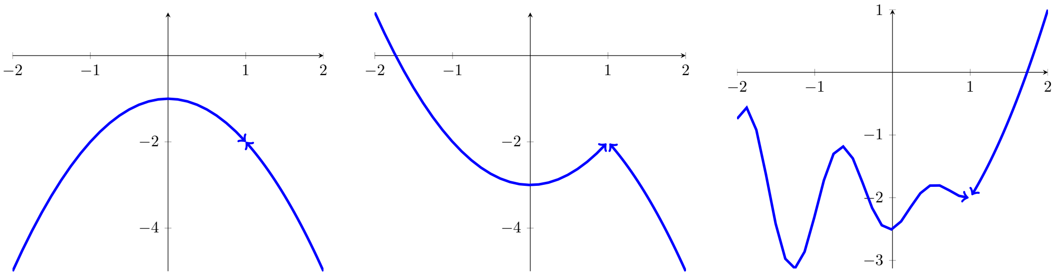
Rast funkcije preko vsake meje v polu z leve (podobno velja za padanje pod vsako mejo ter za obnašanje z desne):

$$\lim_{x\nearrow a} f(x)=\infty \Leftrightarrow \overbrace{\forall M>0}^{\textit{za poljubno veliko število } M} \quad \underbrace{\exists\delta>0:}_{\textit{obstaja bližina } \delta, \textit{ da se}} \quad \Big(\overbrace{a-\delta<x<a}^{\textit{za vsak } x, \textit{ ki je največ za } \delta \textit{ levo od } a} \quad \Rightarrow \underbrace{f(x)>M}_{f(x) \textit{večji od } M} \Big)$$

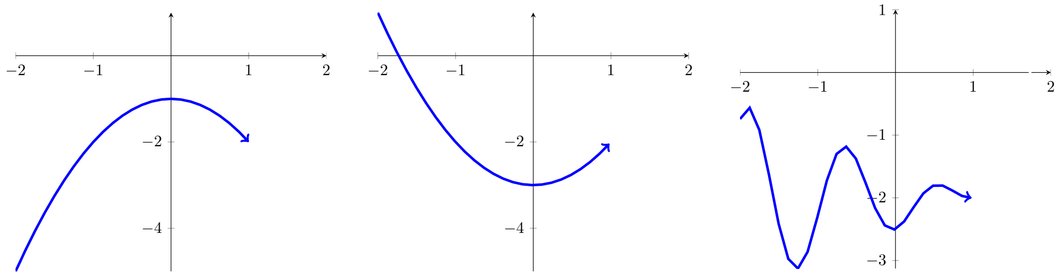
Rast funkcije preko vsake meje v neskončnosti (podobno velja za padanje pod vsako mejo ter za obnašanje v $-\infty$); ekvivalentna je rasti zaporedja preko vsake meje:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \overbrace{\forall M>0}^{\textit{za poljubno veliko število } M} \quad \underbrace{\exists N\in\mathbb{R}:}_{\textit{obstaja število} N, \textit{ da je}} \quad \Big(\overbrace{x\geq N}^{\textit{za je vsak } x, \textit{ ki je večji od } N} \quad \Rightarrow \underbrace{f(x)>M}_{f(x) \textit{večji od } M} \Big)$$

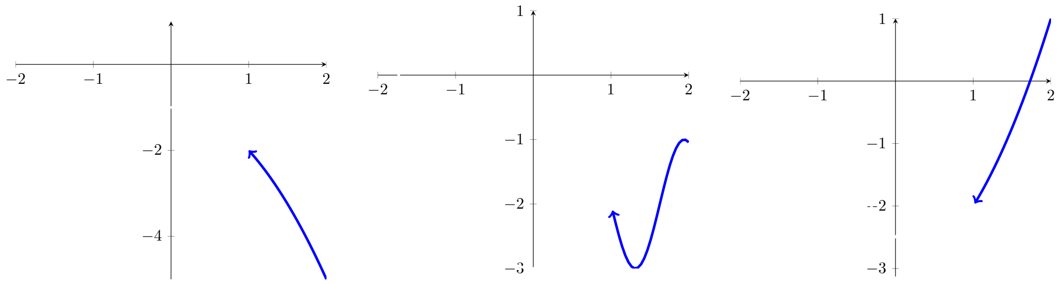
Grafični prikaz limitnih obnašanj funkcij



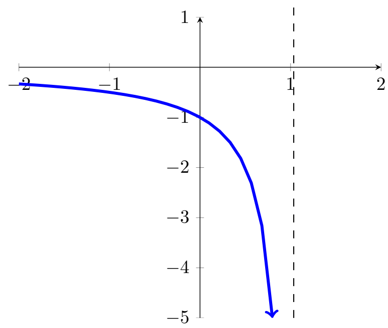
$$\lim_{x\to 1} f(x) = -2$$



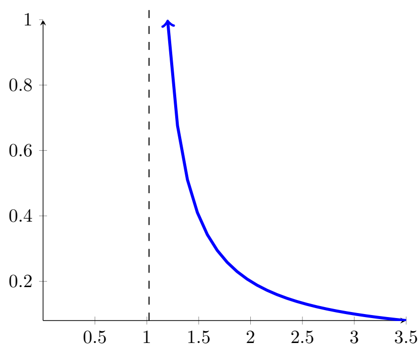
$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = -2$$



$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = -2$$



$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = \infty$$