

Prva funkcija

FRI ima, kot gotovo veste, pogodbe z različnimi uglednimi tujimi organizacijami (NSA, MI5, Mossad - you name it) za izvajanje občasnih del. Nekoč je ena od njih prestregla tole funkcijo v Pythonu. No, pravzaprav ne funkcije, temveč že prevedeno kodo te funkcije. Zanimalo jih je, kaj počne, kaj računa, kaj izpiše, kaj vrne (če kaj). Torej?

Eni pravijo, naj bi bil `n` menda argument funkcije. Pa še tega ne smemo pozabiti, da funkcija

```
2          0 LOAD_CONST          1 (1)
          2 DUP_TOP
          4 STORE_FAST            1 (a)
          6 STORE_FAST            2 (b)

3      >>   8 LOAD_FAST          0 (n)
          10 LOAD_CONST          2 (0)
          12 COMPARE_OP          4 (>)
          14 POP_JUMP_IF_FALSE    48

          16 LOAD_GLOBAL          0 (print)
          18 LOAD_FAST            1 (a)
          20 CALL_FUNCTION        1
          22 POP_TOP

          24 LOAD_FAST            2 (b)
          26 LOAD_FAST            1 (a)
          28 LOAD_FAST            2 (b)
          30 BINARY_ADD
          32 ROT_TWO
          34 STORE_FAST            1 (a)
          36 STORE_FAST            2 (b)

          38 LOAD_FAST            0 (n)
          40 LOAD_CONST          1 (1)
          42 INPLACE_SUBTRACT
          44 STORE_FAST            0 (n)
          46 JUMP_ABSOLUTE        8
      >>   48 LOAD_CONST          0 (None)
          50 RETURN_VALUE
```

Razkrivanje

Naloga je že povedala, da gre za funkcijo z argumentom `n`. Čeprav še ne vemo, kako v Pythonu pisati funkcije (pa tudi zank pravzaprav še ne poznamo), kar napišimo

```
def f(n):
```

Začetek je preprost: Python na sklad naloži konstanto 1, podvoji zadnji element sklada (tako da sta na skladu dve enici) in shraniti tadva elementa v **a** in **b**.

```

2          0 LOAD_CONST          1 (1)
          2 DUP_TOP
          4 STORE_FAST            1 (a)
          6 STORE_FAST            2 (b)

```

To je prevod prirejanja **a = b = 1**.

```

def f(n):
    a = b = 1

```

Potem pa se stvari malo zavozlajo. Točneje, zazankajo. Imamo

```

3      >>    8 LOAD_FAST          0 (n)
          10 LOAD_CONST          2 (0)
          12 COMPARE_OP         4 (>)
          14 POP_JUMP_IF_FALSE   48

```

To na sklad naloži vrednost **n** (kjer je **n** argument funkcije, saj mu očitno nihče ni priredil vrednosti) in 0, ter ju primerja. Če ni res (**POP_JUMP_IF_FALSE**) je da **n > 0**, skoči na bajt 48. Torej nekaj preskoči. To bo najbrž **if** ali, morda, **while**. Dilemo razreši vrstica pred bajtom 48:

```

46 JUMP_ABSOLUTE      8

```

Tu piše, da skočimo na bajt 8, torej ravno na začetek gornjega bloka. Gre torej za zanko: vse med bajtoma 8 in 46 (ali, če hočete, med 16 in 46) se ponavlja, dokler je **n > 0**. Imamo torej

```

def f(n):
    a = b = 1
    while n > 0:

```

Sledi

```

4          16 LOAD_GLOBAL        0 (print)
          18 LOAD_FAST            1 (a)
          20 CALL_FUNCTION       1
          22 POP_TOP

```

To na sklad postavi funkcijo **print** in vrednost **a** ter pokliče to funkcijo (pri čemer ji pošlje en argument - to je pomen enice v **CALL_FUNCTION 1**). Vsaka funkcija v Pythonu vrne rezultat, torej ga vrne tudi **print**. Ker ga ne potrebujemo, ga vržemo stran (**POP_TOP** zavrže zadnji element sklada).

Prišli smo torej do

```

def f(n):
    a = b = 1
    while n > 0:
        print(a)

```

Sledi najbolj zapletena reč.

5	24 LOAD_FAST	2 (b)
	26 LOAD_FAST	1 (a)
	28 LOAD_FAST	2 (b)
	30 BINARY_ADD	
	32 ROT_TWO	
	34 STORE_FAST	1 (a)
	36 STORE_FAST	2 (b)

Na sklad naloži **b**, nato **a**, nato spet **b**. Sklad je torej takšen: **b a b**. Nato sešteje zadnja dva elementa; sklad bo torej **b a + b**. Nato zamenja vrstni red zadnjih dve elementov, torej imamo **a + b b**. Potem shrani zadnji element v **a**; **a** bo torej enak **b**-ju in na skladu ostane **a + b**. Tega shrani v **b**.

Naivno bi torej to prepisali v

```
a = b
b = a + b
```

vendar gornja bajtkoda ne dela tega. V **b** se shrani vsota *prejšnjega* **a**-ja in **b**-ja, tule pa bi se v **b** v bistvu shranil **b + b**. Tisti, ki še ne znajo Pythona, bi tole lahko imitirali le s tretjo spremenljivko, recimo tako

```
t = a + b
a = b
b = t
```

Kdor zna Python (in ga zna dovolj dobro), pa ve, da je možno v njem prirejati tudi sočasno,

```
a, b = b, a + b
```

Kaj se skriva za tem in kako to v resnici deluje, bomo izvedeli prihodnji teden.

Prišli smo torej do

```
def f(n):
    a = b = 1
    while n > 0:
        print(a)
        a, b = b, a + b
```

Sledi

6	38 LOAD_FAST	0 (n)
	40 LOAD_CONST	1 (1)
	42 INPLACE_SUBTRACT	
	44 STORE_FAST	0 (n)

ki naloži **n** in **1**, ju odšteje in to shrani nazaj v **n**, se pravi **n = n - 1** ali **n -= 1**.

```
def f(n):
    a = b = 1
    while n > 0:
        print(a)
        a, b = b, a + b
        n = n - 1
```

Sledi skok, ki je del `while` zadnji dve vrstici,

```
>> 48 LOAD_CONST          0 (None)
     50 RETURN_VALUE
```

pa poskrbita, da funkcija vrne `None`, ker vsaka funkcija v Pythonu pač nekaj vrne. Tidve vrstici se pojavita, četudi v funkcijo ne napišemo eksplicitnega `return None`.

Kaj počne funkcija, prepoznajo vsi, ki so že kdaj napisali funkcijo, ki računa Fibonacijeva števila. Računa namreč Fibonacijeva števila, zaporedje 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 ..., v katerem je vsak člen enak vsoti prejšnjih dveh.

Druga funkcija

Če ste, draga študentka ali študent, potencialni kandidat za občasna pogodbeno dela na FRI, se boste morali izkazati še z nekoliko težjo funkcijo. Kaj izračuna in vrne tale?

Videti je, da naj bi bila ``n`` in ``x`` argumenta funkcije, saj jima nihče ne prireja vrednosti.

```
2          0 LOAD_CONST          1 (1)
          2 STORE_FAST          2 (r)

3      >>  4 LOAD_FAST           1 (n)
          6 LOAD_CONST          2 (0)
          8 COMPARE_OP          4 (>)
         10 POP_JUMP_IF_FALSE    50

4          12 LOAD_FAST          2 (r)
          14 LOAD_CONST          3 (2)
          16 BINARY_MODULO
          18 LOAD_CONST          1 (1)
          20 COMPARE_OP          2 (==)
          22 POP_JUMP_IF_FALSE    32

5          24 LOAD_FAST          2 (r)
          26 LOAD_FAST          0 (x)
          28 BINARY_MULTIPLY
          30 STORE_FAST          2 (r)

6      >>  32 LOAD_FAST          0 (x)
```

	34	LOAD_FAST	0 (x)
	36	BINARY_MULTIPLY	
	38	STORE_FAST	0 (x)
7	40	LOAD_FAST	1 (n)
	42	LOAD_CONST	3 (2)
	44	BINARY_FLOOR_DIVIDE	
	46	STORE_FAST	1 (n)
	48	JUMP_ABSOLUTE	4
8	>>	50 LOAD_FAST	2 (r)
		52 RETURN_VALUE	

Razvozlanje

En kos hitro prepoznamo. Začetnemu prirejanju, `r = 1` sledi zanka `while n > 0`, tako kot v prejšnjem programu. Imamo torej

```
def f(x, n):
    r = 1
    while n > 0:
```

Sledi

4	12	LOAD_FAST	1 (n)
	14	LOAD_CONST	3 (2)
	16	BINARY_MODULO	
	18	LOAD_CONST	1 (1)
	20	COMPARE_OP	2 (==)
	22	POP_JUMP_IF_FALSE	32

Na sklad naloži `n` in `2`, izračuna ostanek po deljenju z `2` (po čemer na skladu ostane ta ostanek); na sklad naloži `1` in primerja, če sta enaka. Z drugimi besedami, preveri, ali velja `n % 2 == 1`. Če to ni res, skoči na bajt `40`. Tu bi lahko spet šlo za `while`, vendar imamo tokrat `if`, kar vidimo po tem, da v bajtu `40` oziroma tik pred njim ni nobenega skoka nazaj. Tale `POP_JUMP_IF_FALSE` samo preskoči naslednji blokec, naslednjo vrstico programa.

```
def f(x, n):
    r = 1
    while n > 0:
        if n % 2 == 1:
```

Ta naslednja vrstica, se je prevedla v

5	24	LOAD_FAST	2 (r)
	26	LOAD_FAST	0 (x)
	28	BINARY_MULTIPLY	
	30	STORE_FAST	2 (r)

in zdaj to menda že znano prebrati: naloži r in x , ju zmnoži in rezultati shrani nazaj v r , torej

```
def f(x, n):
    r = 1
    while n > 0:
        if n % 2 == 1:
            r = r * x
```

Nato - in to je že izven `if`-a, saj je skok `POP_JUMP_IF_FALSE` skočil natančno sem - se zgodi

6	>>	32	LOAD_FAST	0 (x)
		34	LOAD_FAST	0 (x)
		36	BINARY_MULTIPLY	
		38	STORE_FAST	0 (x)

kar je $x = x * x$,

```
def f(x, n):
    r = 1
    while n > 0:
        if n % 2 == 1:
            r = r * x
        x = x * x
```

Sledi

7		40	LOAD_FAST	1 (n)
		42	LOAD_CONST	3 (2)
		44	BINARY_FLOOR_DIVIDE	
		46	STORE_FAST	1 (n)

To naloži na sklad n in 2, ju celoštevilsko deli in rezultat shrani nazaj v n , se pravi

```
def f(x, n):
    r = 1
    while n > 0:
        if n % 2 == 1:
            r = r * x
        x = x * x
        n = n // 2
```

Nato imamo skok, ki zaključi zanko. Sledi ji le še

8	>>	50	LOAD_FAST	2 (r)
		52	RETURN_VALUE	

Naložimo vrednost r in jo vrnemo. Celotna funkcija je torej

```
def f(x, n):
    r = 1
    while n > 0:
        if n % 2 == 1:
            r = r * x
        x = x * x
        n = n // 2
    return r
```

ali, če imamo raje inkrementalne operatorje

```
def f(x, n):
    r = 1
    while n > 0:
        if n % 2 == 1:
            r *= x
        x *= x
        n //= 2
    return r
```

Kaj počne ta funkcija?

Tole je pomembna funkcija. Uporabljamo jo stalno, ne da bi vedeli, da jo. Za začetek jo preskusimo s par argumenti in poskusimo uganiti, kar pravzaprav računa.

```
def f(x, n):
    r = 1
    while n > 0:
        if n % 2 == 1:
            r *= x
        x *= x
        n //= 2
    return r
```

f(2, 5)

32

f(5, 2)

25

f(10, 4)

10000

f(10, 6)

1000000

f(5, 3)

Stvar je očitna: funkcija vrne x^n , pri čemer mora biti n celo število (ker celoštevilsko deljenje in tako naprej).

```
def f(x, n):
    i = 0
    r = 1
    while i < n:
        r *= x
        i += 1
    return r
```

```
def f(x, n):
    r = 1
    for i in range(n):
        r *= x
    return r
```

125

 $2^{**}1024$

17976931348623159077293051907890247336179769789423065727343008115773267580550096313270847732

Ko bi pognali for i in range(1797693134862315907729305190789024733617976978942306572734300811514773224075360211201138798713933576587897688144166224928474306394741243777678934248654852763609411945308295208500576883815068234246288147391311054082723716335051068458629823994724593835356329624224137216) bi čakali in čakali in potem bi se naveličali čakati, in potem bi vesolje čakalo in čakalo in se naveličalo čakati in se končalo, kakorkoli se že ima namen končati ... zanka pa bi tekla še naprej.

Očitno potrebujemo hitrejši način za računanje takšnih gromozanski potenc. Preden ga spoznamo, pa moramo razčistiti dvoje.

1. Zakaj potrebujemo take ogromne potence?
2. Če je to samo eksponent in torej računamo, na primer $2^{17976931348623159077293051907890247336179769789423065727}$
- mar ni to število preveliko, da bi ga shranili v pomnilnik?


```
def f(n):
    while n > 0:
        if n % 2 == 1:
            print(1)
        else:
            print(0)
        n //= 2
```

f(38)

```
0
1
1
0
0
1
```

Zdaj pa mimogrede izpisujemo še dvojiške številke.

```
def f(n):
    b = 1
    while n > 0:
        if n % 2 == 1:
            print(b, 1)
        else:
            print(b, 0)
        b *= 2
        n //= 2
```

f(38)

```
1 0
2 1
4 1
8 0
16 0
32 1
```

Zdaj pa ne izpisujemo tistih ničel; pravzaprav izpisujemo samo številke, ki jih imamo pri enicah.

```
def f(n):
    b = 1
    while n > 0:
        if n % 2 == 1:
            print(b)
        b *= 2
        n //= 2
```

f(38)

2
4
32

Izpisalo se je 2, 4 in 32, kar je ravno prav, saj je $2 + 4 + 32 = 38$.

Pa recimo, da bi morali izračunati, koliko je 5^{38} .

```
5 ** 38
```

```
363797880709171295166015625
```

Počasi: $5^{38} = 5^{2+4+32} = 5^2 \times 5^4 \times 5^{32}$. To bi se dalo sprogramirati tako:

```
def f(x, n):  
    b = 1  
    r = 1  
    while n > 0:  
        if n % 2 == 1:  
            r *= x ** b  
        b *= 2  
        n //= 2  
    return r
```

```
f(5, 38)
```

```
363797880709171295166015625
```

Da, številka je ista, torej funkcija deluje. Ampak lahko smo še pametnejši. Pravzaprav moramo biti: v funkciji še vedno uporabljamo potenciranje $x ** b$, kar je pravzaprav goljufija. Tega $x ** b$ se moramo znebiti.

Poglejmo, kakšne potence uporabljamo: ko je b enak 1, množimo (ali pa tudi ne) z x , nato je b enak 2 in morda množimo z x^2 , nato je b enak 4 in morda množimo z x^4 , nato z x^8 , nato z x^{16} , x^{32} . Kako dobimo takšno zaporedje x -ov? S kvadriranjem! x^8 je ravno x^{4+4} oziroma $x^4 \times x^4$ oziroma x^{4^2} . Vsak naslednji x dobimo s kvadriranjem prejšnjega x -a.

Ukinemo torej b . Namesto z $x ** b$ množimo kar z x in potem namesto, da bi podvojili b , pokvadriramo x .

```
def f(x, n):  
    r = 1  
    while n > 0:  
        if n % 2 == 1:  
            r *= x  
        x *= x  
        n //= 2  
    return r
```

```
f(5, 38)
```

363797880709171295166015625

In to je natančno funkcija iz uganke!

Kako hitra je ta funkcija? Še vedno imamo zanko. Vendar se je ona, naivna zanka prejšnje funkcija obrnila tolikokrat, kolikor je bil velik eksponent. Tale pa eksponent v vsakem koraku deli z 2 in se ustavi, ko je eksponent enak 0. Ker deljenje z 2 v bistvu pomeni odbijanje zadnjega bita, se ta zanka obrne tolikokrat, kolikor bitov je velik eksponent. Če imamo 1024 bitni eksponent, se zanka obrne 1024-krat.

Samo še nekaj nam manjka: kako je s tistim ostankom? Vemo, da ne smemo najprej potencirati in šele nato računati ostanke.

To je pa preprosto: ker gre za sama množenja, lahko ostanke računamo kar sproti: ob vsakem množenju obdržimo le ostanek.

```
def f(x, n, m):  
    r = 1  
    while n > 0:  
        if n % 2 == 1:  
            r = (r * x) % m  
        x = (x * x) % m  
        n //= 2  
    return r
```

f(x, n, m)

22872358624663969387800566354005582