

Diskretne strukture UNI

Vaje 13

- (a) Izračunaj $\varphi(1215)$ in $\varphi(1216)$.
(b) Določi $1024^{3241} \pmod{1215}$.
- S pomočjo malega Fermatovega izreka pokaži, da
 - 23 deli $a^{154} - 1$ za vse $a \in \mathbb{N}$, za katere je $\gcd(a, 23) = 1$.
 - 17 deli $a^{80} - 1$ za vse $a \in \mathbb{N}$, za katere je $\gcd(a, 17) = 1$.
- (a) Koliko je ostanek števila $((5^9)^{13})^{17}$ pri deljenju z 11?
(b) Koliko je ostanek števila $5^{9^{13^{17}}}$ pri deljenju z 11?
- Reši enačbe:
 - $11x \equiv 242 \pmod{21}$,
 - $5x \equiv 270 \pmod{25}$,
 - $((6^7)^8)^9 \equiv x \pmod{13}$,
 - $6^{7^{8^9}} \equiv x \pmod{13}$.

5. Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Zapiši α in β kot produkt disjunktnih ciklov.
 - Zapiši permutacijo $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$.
 - Poišči najmanjše število k , za katerega je $\alpha^k = \text{id}$.
 - Poišči najmanjše število k , za katerega je $\beta^k = \text{id}$.
6. Dana je permutacija

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Določi π^{-1} .
 - Zapiši π kot produkt disjunktnih ciklov.
 - Zapiši π kot produkt samih transpozicij.
 - Določi π^2 in π^{2022} .
7. Za $n > 3$ definiramo permutacije $\pi_n \in S_n$ kot produkt ciklov

$$\pi_n = (1 \ 2 \ n)(1 \ 3 \ n) \cdots (1 \ n-1 \ n).$$

- Zapiši permutacije π_4 , π_5 in π_6 .
- Izračunaj $\pi_n(1)$, $\pi_n(n)$, $\pi_n^{-1}(1)$ in $\pi_n^{-1}(n)$.
- Določi ciklično strukturo in parnost permutacije π_n .

8. Poišči vsaj dve permutaciji $\pi \in S_6$, za kateri je

$$\pi^3 = (1 \ 2)(3 \ 4)(5 \ 6).$$

9. Dane so permutacije

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 8 & 6 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 9 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 6 & 9 & 1 & 5 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

- (a) Poišči ciklično strukturo, red in parnost permutacije γ .
(b) Poišči vse možne ciklične strukture permutacije π , ki zadošča enačbi

$$\alpha * \beta * \pi^2 * \beta^{-1} = \gamma.$$

- (c) Za vsako možno ciklično strukturo poišči eno rešitev enačbe.