Diskretne strukture

Izročki, moč množic, preslikave

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

15. november 2022

- Naj bo A končna množica. Potem $|A|$ označuje *število elementov* ali *moč* množice A.

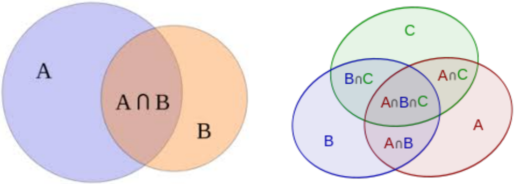
  Primeri. $|\emptyset| = 0, \quad |\{0,1\}| = 2, \quad |\{\{0,1\}\}| = 1.$

- Če za končni množici A in B velja $|A| = |B|$, pravimo, da sta A in B *enako močni*. Pišemo: $A \sim B$.

Trditev

Naj bodo A, B, C končne množice.

1. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
2. $|\mathcal{P}A| = 2^{|A|}$
3. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
4. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



Načelo vključitev in izključitev

Naj bo A neka množica in A_1, A_2, A_3, A_4 njene podmnožice. Potem velja:

$$
\begin{aligned}
& |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \\
= \quad & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\
- \quad & |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\
+ \quad & |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
- \quad & |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.
\end{aligned}
$$

Izrek (Načelo vključitev in izključitev)

Naj bo A končna množica in $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq A$. Vpeljemo oznako

$$A_{i_1, i_2, \ldots, i_k} := A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}.$$

Potem je

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = & \underbrace{|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|}_{\text{vsota moči vseh množic } A_i} \\
- \quad & \underbrace{\left(|A_{1,2}| + |A_{1,3}| + \ldots + |A_{n-1,n}|\right)}_{\text{vsota moči vseh množic } A_{i,j}} + \underbrace{\left(|A_{1,2,3}| + |A_{1,2,4}| + \ldots + |A_{n-2,n-1,n}|\right)}_{\text{vsota moči vseh množic } A_{i,j,k}} \\
- \quad & \underbrace{\left(|A_{1,2,3,4}| + |A_{1,2,3,5}| + \ldots + |A_{n-3,n-2,n-1,n}|\right)}_{\text{vsota moči vseh množic } A_{i,j,k,\ell}} + \ldots + (-1)^{n+1}|A_{1,2,3,\ldots,n}|.
\end{aligned}
$$

Primer

Koliko je števil na celoštevilskem intervalu $[1 \dots 96]$, ki so deljiva s 6 in niso deljiva niti s 24 niti z 32.

Rešitvi. Definirajmo univerzalno množico $S = \{1, 2, \dots, 96\}$.

$A := \{x \in S\colon x \text{ je deljiv s } 6\}$, $B := \{x \in S\colon x \text{ ni deljiv s } 24\}$, $C := \{x \in S\colon x \text{ ni deljiv z } 32\}$.

Zanima nas $|A \cap B \cap C|$. Velja

$$A \cap B \cap C = S \setminus (A \cap B \cap C)^c = S \setminus (A^c \cup B^c \cup C^c).$$

Velja

$$|A^c \cup B^c \cup C^c| = |A^c| + |B^c| + |C^c| - |A^c \cap B^c| - |A^c \cap C^c| - |B^c \cap C^c| + |A^c \cap B^c \cap C^c|.$$

Premislimo

$$A^c = \{x \in S\colon x \text{ ni deljiv s } 6\} \quad \Rightarrow \quad |A^c| = 96 - \frac{96}{6} = 96 - 16 = 80,$$

$$B^c = \{x \in S\colon x \text{ je deljiv s } 24\} \quad \Rightarrow \quad |B^c| = \frac{96}{24} = 4,$$

$$C^c = \{x \in S\colon x \text{ je deljiv z } 32\} \quad \Rightarrow \quad |C^c| = \frac{96}{32} = 3,$$

$$A^c \cap B^c = \{x \in S\colon x \text{ ni deljiv s } 6 \text{ in je deljiv s } 24\} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad |A^c \cap B^c| = 0,$$

$$A^c \cap C^c = \{x \in S\colon x \text{ ni deljiv s } 6 \text{ in je deljiv z } 32\} = \{32, 64\} \quad \Rightarrow \quad |A^c \cap C^c| = 2,$$

$$B^c \cap C^c = \{x \in S\colon x \text{ je deljiv s } 24 \text{ in je deljiv z } 32\} = \{96\}, \quad \Rightarrow \quad |B^c \cap C^c| = 1,$$

$$A^c \cap B^c \cap C^c \subseteq A^c \cap B^c = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset \quad \Rightarrow \quad |A^c \cap B^c \cap C^c| = 0.$$

Sledi

$$|A^c \cup B^c \cup C^c| = 80 + 4 + 3 - 2 - 1 = 84 \quad \Rightarrow \quad |A \cap B \cap C| = 96 - 84 = 12.$$

Primer

Zaposleni v nekem podjetju programirajo v treh jezikih: Java, C in C++. V vsakem jeziku programira tri petine programerjev, v C in C++ dve petini, v C-ju in Javi tri desetine ter v jezikih Java in C++ ena petina. V vseh treh jezikih programira 10 programerjev.
Koliko programerjev je zaposlenih v podjetju?
Koliko jih programira v natanko dveh jezikih?

Rešitvi. Definirajmo univerzalno množico S vseh zaposlenih programerjev v podjetju.

$$A := \{x \in S : x \text{ programira v Javi.}\}, \quad B := \{x \in S : x \text{ programira v C.}\},$$
$$C := \{x \in S : x \text{ programira v C++.}\}.$$

Zanima nas

- $|A \cup B \cup C|$.
- $|A \cap B \cap C^c| + |A \cap B^c \cap C| + |A^c \cap B \cap C|$.

Naj bo $N := |S|$. Vemo še:

- $|A| = |B| = |C| = \frac{3}{5}N$.
- $|B \cap C| = \frac{2}{5}N$, $|A \cap B| = \frac{3}{10}N$, $|A \cap C| = \frac{1}{5}N$.
- $|A \cap B \cap C| = 10$.

Velja

$$N = |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
$$= \frac{9}{5}N - \frac{3}{10}N - \frac{2}{5}N - \frac{1}{5}N + 10.$$

Sledi $\frac{1}{10}N = 10$ oz. $N = 100$.
Velja še

$$|A \cap B \cap C^c| + |A \cap B^c \cap C| + |A^c \cap B \cap C| = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 3|A \cap B \cap C|$$
$$= (2/5 + 3/10 + 1/5)N - 30 = 60.$$

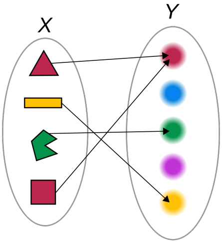
Naj bosta X, Y množici in $\mathcal{D}_f \subseteq X$ podmnožica. Predpis $f : D_f \to Y$ je *preslikava* iz $\mathcal{D}_f$ v Y, če je za vsak element $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x)$ nek točno določen element iz Y.

Množici $\mathcal{D}_f$ pravimo *definicijsko območje* preslikave f.

Množici

$$\mathcal{Z}_f := \{y \in Y : y = f(x) \text{ za nek } x \in \mathcal{D}_f\}$$

pravimo *zaloga vrednosti* preslikave f.



Slika na levi predstavlja neko preslikavo $f : X \to Y$.

Pišemo $y = f(x)$ ali pa tudi $f : x \mapsto y$,

in pravimo, da f *(pre)slika* x v y,

x je *argument*, y pa *vrednost* preslikave f pri x.

Tudi: y je *slika* x-a.

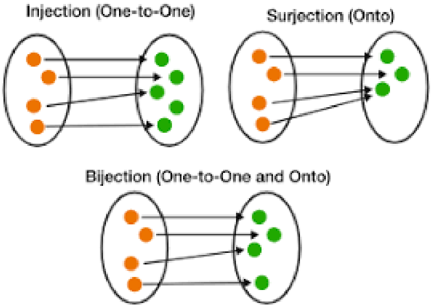
Primer

Naj bo X *množica nepraznih bitnih besed* $\{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots\}$ *in* Y *množica naravnih števil* $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$*. Kateri od naslednjih predpisov so dobro definirane preslikave iz* X *v* Y*?*

- $f_1(x) = y$ *natanko tedaj, ko je* y *število enic v* x*-u.*
- $f_2(x) = y$ *natanko tedaj, ko je* y *prvi bit niza* x*.*
- $f_3(x) = y$ *natanko tedaj, ko je* y *mesto najbolj leve ničle v* x*-u.*
- $f_4(x_1) = x_2$ *natanko tedaj, ko* x_2 *dobimo tako, da nizu* x_1 *dodamo na koncu* 0 *ali* 1*.*
- $f_5(x) = y$ *natanko tedaj, ko je* x *niz* y *zaporednih enic.*

Naj bo $f : X \to Y$. Pravimo, da je

- f *injektivna*, če $\forall x, y \in X : (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$
- f *surjektivna*, če $\mathcal{Z}_f = Y$ (pravimo tudi, da je f preslikava iz X *na* Y)
- f *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.



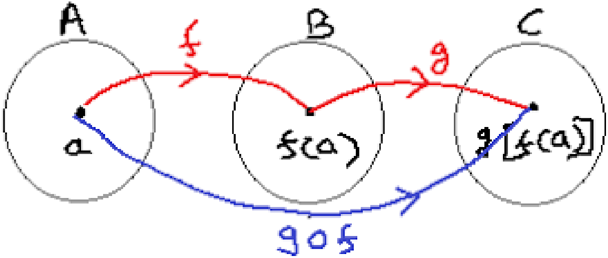
Preslikavi $\mathrm{id}_X : X \to X$, za katero velja $\mathrm{id}_X(x) = x$ za vsak $x \in X$, pravimo *identična preslikava* ali *identiteta* na množici X.

Naj bodo A, B, C množice in $f : A \to B$, $g : B \to C$ preslikave. Potem je

$$g \circ f : A \to C$$

preslikava iz A v C, določena s predpisom

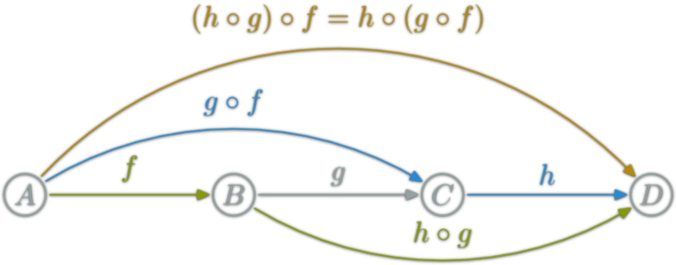
$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \qquad \text{za vse} \quad a \in A.$$



Trditev

Kompozitum preslikav je asociativna operacija, velja namreč:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$



Trditev

Naj bo $f : A \to B$. Potem je

$$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$$

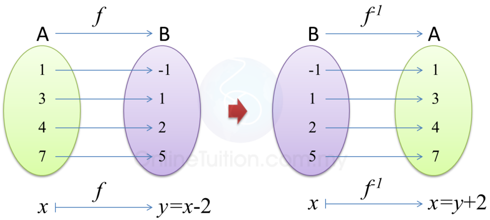
Naj bosta A, B množici in $f : A \to B$ preslikava. Kdaj obstaja preslikava f^{-1} iz neke podmnožice $B_1 \subseteq B$ v A, da velja

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{B_1} \qquad \text{in} \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A?$$

Trditev

Naj bo $f : A \to B$ preslikava.

1. $f^{-1} : \mathcal{Z}_f \to A$ *je preslikava natanko tedaj, ko je f injektivna,*
2. $f^{-1} : B \to A$ *je preslikava natanko tedaj, ko je f bijektivna.*



(a) (b)

Trditev

Naj bodo A, B, C množice in $f : A \to B$, $g : B \to C$ preslikavi. Velja:

1. f, g *injektivni* $\Longrightarrow g \circ f$ *injektivna*
2. f, g *surjektivni* $\Longrightarrow g \circ f$ *surjektivna*
3. $g \circ f$ *injektivna* $\Longrightarrow f$ *injektivna*
4. $g \circ f$ *surjektivna* $\Longrightarrow g$ *surjektivna*

Dokaz točke 1. Naj bosta $a_1, a_2 \in A$, ki zadoščata $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Po definiciji kompozituma to pomeni, da je $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Ker je g injektivna, od tod sledi $f(a_1) = f(a_2)$. Ker je f injektivna, od tod sledi $a_1 = a_2$. To pa pomeni, da je $g \circ f$ injektivna.

Dokaz točke 4. Naj bosta $c \in C$ poljuben. Iščemo $b \in B$, ki zadošča $g(b) = c$. Ker je $g \circ f$ surjektivna, obstaja $a \in A$, da velja $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$. Za b lahko vzamemo $f(a)$.

Posledica

Naj bosta A, B množici in $f : A \to B$, $g : B \to A$, preslikavi. Če je

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \textit{in} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B,$$

potem sta

$$f, g \textit{ bijekciji in je } g = f^{-1}.$$