Diskretne strukture

Izročki, teorija množic

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

8. november 2022

Vsebovanost elementa x v množici A podamo z *relacijo pripadnosti*.
Pišemo: $x \in A$. Beremo: x *pripada* A.

Množice lahko podamo na naslednja načina:

- z *naštevanjem elementov*: $A = \{0, 1, 2\}$
- z neko *izjavno formulo*: $A = \{x\,;\,\varphi(x)\}$
  Velja: $x \in A \Leftrightarrow \varphi(x) = 1$.

Primer

Zgledi množic so:

$$\begin{aligned} A &= \{x\,;\,x \neq x\} = \emptyset \qquad \textit{prazna množica}, \\ B &= \{x\,;\,x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2\} = \{0, 1, 2\}, \\ C &= \{x\,;\,x^2 + 1 \geq 5\}. \end{aligned}$$

Pozor - Russellov paradoks: Vsaka izjavna formula ni dobra!

$$R = \{x\,;\,x \notin x\}$$

Ali velja $R \in R$? $\quad R \in R$ natanko tedaj, ko $R \notin R$.

- Množici A in B sta *enaki*,

$$A = B \iff \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Pravimo, da je A v relacije *enakosti* z B.

- Množica A je *podmnožica* množice B,

$$A \subseteq B \iff \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Pravimo, da je A v relacije *inkluzije* z B.

- Množica A je *prava podmnožica* množice B,

$$A \subset B \iff A \subseteq B \,\wedge\, A \neq B$$

Pravimo, da je A v relacije *stroge inkluzije* z B.

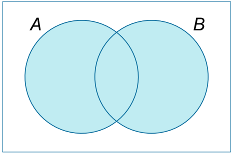
Trditev

Za poljubne množice A, B in C velja

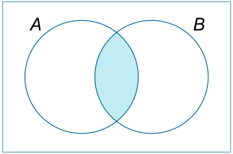
- $\emptyset \subseteq A$ *in* $A \subseteq A$.
- $A \subseteq A$.
- $A = B$ *natanko tedaj, ko je* $A \subseteq B$ *in* $B \subseteq A$.
- *Če* $A \subseteq B$ *in* $B \subseteq C$, *potem* $A \subseteq C$.

Osnovne operacije z množicami so:

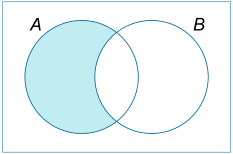
- *unija* $A \cup B = \{x \,;\, x \in A \vee x \in B\}$



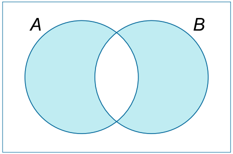
- *presek* $A \cap B = \{x \,;\, x \in A \wedge x \in B\}$



- *razlika* $A \setminus B = \{x \,;\, x \in A \wedge x \notin B\}$



- *simetrična razlika* $\quad A + B = \{x\,;\, x \in A \veebar x \in B\}$



Lastnosti osnovnih operacij pa so:

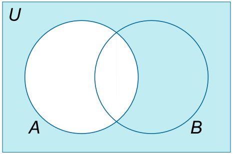
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

Pravimo, da sta množici A in B *disjunktni*, če je $A \cap B = \emptyset$.

Univerzalna množica, označimo jo z S, ustreza področju pogovora v predikatnem računu.

Vse obravnavane množice so vsebovane v univerzalni množici S.

Komplement množice A definiramo kot $A^c = S \setminus A$.



Komplementiranje ima naslednje lastnosti:

- $(A^c)^c = A$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

  Dokaz. Veljajo naslednje ekvivalence:

  - $x \in (A \cup B)^c$ natanko tedaj, ko $x \in S \setminus (A \cup B)$.. . . (definicija ^{c}).
  - $x \in S \setminus (A \cup B)$ ntk $x \in S$ in $x \notin A \cup B$. . . . (def $\setminus$)
  - $x \in S$ in $x \notin A \cup B$ ntk $x \in S$ in $x \notin A$ in $x \notin B$. . . . (def $\cup$)
  - $x \in S$ in $x \notin A$ in $x \notin B$ ntk $x \in S \setminus A = A^c$ in $x \in S \setminus B = B^c$. . . . (def ^{c})
  - $x \in A^c$ in $x \in B^c$ ntk $x \in A^c \cap B^c$. . . . (def $\cap$)

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $A \setminus B = A \cap B^c$

  Dokaz. Veljajo naslednje ekvivalence:

  $$(x \in A \setminus B) \text{ ntk } (x \in A \text{ in } x \notin B) \text{ ntk } (x \in A \text{ in } x \in B^c) \text{ ntk } x \in A \cap B^c.$$

- $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$
- $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^c \iff B \subseteq A^c$

Po prednosti je komplement ^{c} močnejši od preseka $\cap$ in razlike $\setminus$, ti dve pa močnejši od unije $\cup$ in simetrične razlike $+$:

^{c}	$\cap$ $\setminus$	$\cup$ $+$

Na naslednjih dveh straneh bomo videli osnovne enakosti z množicami, ki jih operacije z množicami *"podedujejo"* iz ustreznih lastnosti izjavnih veznikov.

Absorpcija

$$\boxed{A \cup (A \cap B) = A}$$
$$\boxed{A \cap (A \cup B) = A}$$

Dokaz drugega dela absorpcije. Vzemimo poljuben element x iz $A \cap (A \cup B)$. Od tod sledi $x \in A$ in $x \in (A \cup B)$. Posebej torej $x \in A$, iz česar sledi vsebovanost $A \cap (A \cup B) \subseteq A$.

Vzemimo poljuben element x iz A. Sledi $x \in A \cup B$ in zato $x \in A \cap (A \cup B)$. Torej imamo tudi vsebovanost $A \subseteq A \cap (A \cup B)$.

Iz obeh vsebovanosti sledi enakost $A \cap (A \cup B) = A$.

Distributivnost

$$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$
$$\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$
$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$$

Dokaz prvega dela distributivnosti. Vzemimo poljuben element x iz $A \cap (B \cup C)$. Od tod sledi $x \in A$ in $x \in (B \cup C)$. Sledi $x \in B$ ali $x \in C$. V prvem primeru imamo $x \in A \cap B$, v drugem pa $x \in A \cap C$. Sklepamo, da $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, iz česar sledi vsebovanost $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Vzemimo poljuben element x iz $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Sledi $x \in A \cap B$ ali $x \in A \cap C$. V prvem primeru sledi $x \in A$ in $x \in B$, v drugem pa $x \in A$ in $x \in C$. V obeh primerih torej $x \in A$ in $x \in B \cup C$. Sklepamo, da $x \in A \cap (B \cup C)$, iz česar sledi vsebovanost $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

Iz obeh vsebovanosti sledi enakost $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

de Morganova zakona	$\boxed{(A\cap B)^c = A^c \cup B^c}$ $\boxed{(A\cup B)^c = A^c \cap B^c}$
Zakon dvojnega komplementa	$(A^c)^c = A$
Idempotenca	$A\cap A = A$ $A\cup A = A$
Komutativnost	$A\cap B = B\cap A$ $A\cup B = B\cup A$ $A+B = B+A$
Asociativnost	$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ $(A+B)+C = A+(B+C)$
Kontrapozicija	$A\subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
$\emptyset$ in S	$A\cap\emptyset = \emptyset$ $A\cap S = A$ $A\cup\emptyset = A$ $A\cup S = S$
Lastnosti simetrične razlike	$A+B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ $A+B = (A\cup B)\cup(A\cap B)$

Potenčna množica množice A, $\mathcal{P}A$, je množica vseh podmnožic množice A. S simboli:

$$\mathcal{P}A = \{B \; ; \; B \subseteq A\}$$

Opomba. Tako $\emptyset$ kot A pripadata potenčni množici $\mathcal{P}A$.

Primer

- $\mathcal{P}\{1,2,3\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.
- $\mathcal{P}\emptyset = \{\emptyset\} \qquad \mathcal{P}\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Trditev

Če množica A vsebuje natanko n elementov in je n naravno število, potem $\mathcal{P}A$ vsebuje natanko 2^n elementov.

Dokaz. Vsak element iz A bodisi je element podmnožice bodisi ni element podmnožice. Torej imamo za vsak element 2 možnosti. Skupaj imamo tako 2^n različnih možnosti. Vsaka od možnosti ustreza neki podmnožici množice A.

Trditev

Iz vsebovanosti $A \subseteq B$, sledi vsebovanost $\mathcal{P}A \subseteq \mathcal{P}B$.

Naj bo
$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\} = \{A_i \,;\, i \in \mathcal{I}\}$$
družina množic. Z $\mathcal{I}$ označimo indeksno množico.

- *Unija družine* $\mathcal{A}$ je množica
$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x \,;\, \exists i\, (i \in \mathcal{I} \wedge x \in A_i)\}$$
- *Presek družine* $\mathcal{A}$ je množica
$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x \,;\, \forall i\, (i \in \mathcal{I} \Rightarrow x \in A_i)\}$$
- Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i \,;\, i \in \mathcal{I}\}$ je *pokritje* množice B, če je
$$B = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i.$$
- Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i \,;\, i \in \mathcal{I}\}$ je *razbitje* množice B, če je
  - $\mathcal{A}$ pokritje množice B ($B = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$)
  - elementi $\mathcal{A}$ so neprazni ($\forall i \in \mathcal{I} : A_i \neq \emptyset$) in
  - elementi $\mathcal{A}$ so paroma disjunktni ($\forall i, j \in \mathcal{I}, i \neq j : A_i \cap A_j \neq \emptyset$).

Primer. $\mathcal{C} = \{[i, i+1] \colon i \in \mathbb{Z}\}$ je pokritje za $\mathbb{R}$, $\mathcal{D} = \{[i, i+1) \colon i \in \mathbb{Z}\}$ pa je razbitje za $\mathbb{R}$.

Urejeni pari in kartezični produkt

Urejeni par s prvo komponento (koordinato) a in drugo komponento (koordinato) b označimo z (a, b).

Trditev (osnovna lastnost urejenih parov)

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ in } b = d$$

Kartezični produkt množic A in B je množica vseh urejenih parov. S simboli:

$$A \times B = \{(a, b) \; ; \; a \in A \wedge b \in B\}.$$

Definicijo kartezičnega produkta lahko razširimo na več faktorjev.

$A \times B \times C$ je množica vseh urejenih trojic s prvo koordinato v A, drugo v B in tretjo koordinato v množici C.

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je *urejena n-terica*. $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ je množica vseh urejenih n-teric s prvo koordinato v A_1, drugo v A_2, ... in zadnjo v A_n.

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

  Dokaz. Naj bo (x, y) poljuben element iz $A \times (B \cup C)$. Torej je $x \in A$ in $y \in B \cup C$. Sledi $y \in B$ ali $y \in C$. V prvem primeru je $(x, y) \in A \times B$, v drugem pa $(x, y) \in A \times C$. V obeh primerih pa je $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Sklepamo na vsebovanost $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

  Naj bo (x, y) poljuben element iz $(A \times B) \cup (A \times C)$. Torej je $(x, y) \in A \times B$ in $(x, y) \in A \times C$. V prvem primeru je $x \in A$ in $y \in B$, v drugem pa je $x \in A$ in $y \in C$. V obeh primerih pa je $(x, y) \in A \times (B \cup C)$. Sklepamo na vsebovanost $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

  Sledi, da velja $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

  Dokaz. Velja $(A \cap B) \times (C \cap D) \subseteq A \times (C \cap D) \subseteq A \times C$. Podobno $(A \cap B) \times (C \cap D) \subseteq B \times D$. Sledi $(A \cap B) \times (C \cap D) \subseteq (A \times C) \cap (B \times D)$.

  Vzemimo poljuben $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$. Sledi $(x, y) \in A \times C$ in $(x, y) \in B \times D$. Velja $x \in A$, $y \in C$ in $x \in B, y \in D$. Torej je $x \in A \cap B$ in $y \in C \cap D$. Sklepamo $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$ in zato $(A \times C) \cap (B \times D) \subseteq (A \cap B) \times (C \cap D)$.

  Obe vsebovanosti implicirata enakost $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

- $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$

Lastnosti kartezičnega produkta

- $A \times B \subseteq C \times D \ \wedge \ A \times B \neq \emptyset \implies A \subseteq C \wedge B \subseteq D$
- A končna z m elementi in B končna z n elementi $\implies$ $A \times B$ končna z $m \cdot n$ elementi.

Če v tretjo lastnost vstavimo $C = D$, pridelamo

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

Podobno, če vstavimo $A = B$.

Toda v splošnem

$$(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D).$$

Protiprimer. $A = C = [0, 1]$, $B = D = [1, 2]$. Velja

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = [0, 2] \times [0, 2],$$

toda

$$(A \times C) \cup (B \times D) = [0, 1] \times [0, 1] \cup [1, 2] \times [1, 2].$$