Diskretne strukture

Izročki indukcija, izjavni račun

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

4. oktober 2022

Vsebina predmeta

1. Matematična indukcija
2. Izjavni račun
3. Predikatni račun
4. Množice in funkcije
5. Relacije in preslikave
6. Grafi
7. Osnove teorije števil

Naravna števila in matematična indukcija

Naravna števila

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

V nekaterih tekstih $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ in $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Gre za stvar dogovora.

Princip matematične indukcije:

Gre za metodo dokazovanja trditev o naravnih številih.

1. Fiksirajmo neko naravno število n_0.
2. Želimo dokazati, da neka trditev $T(n)$, ki jo imenujemo indukcijska predpostavka in v kateri nastopa spremenljivka n, drži za vsa naravna števila n od n_0 naprej.
3. To naredimo v dveh korakih:
   3.1 *Baza indukcije*: Dokažemo, da je $T(n_0)$ pravilna.
   3.2 *Indukcijski korak*: Dokažemo, da za katerikoli $k \geq n_0$ iz veljavnosti trditve $T(k)$, sledi veljavnost trditve $T(k+1)$.

Matematična indukcija - primeri

Naloga: Dokaži, da za vsako naravno število n velja, da je vsota najmanjših n lihih naravnih števil enaka izrazu n^2.

Rešitev:

- *Indukcijska predpostavka:*
  $T(n) \ldots$ vsota najmanjših n lihih naravnih števil je enaka n^2.
- *Baza indukcije:*
  $T(0) \ldots$ vsota najmanjših 0 lihih naravnih števil je enaka 0^2. ✓
- *Indukcijski korak:*
  Če je vsota prvih k lihih naravnih števil enaka k^2, potem je vsota prvih $k+1$ lihih naravnih števil enaka $(k+1)^2$.

  Privzamemo torej veljavnost trditve $T(k)$, tj.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2. \tag{1}$$

Preveriti moramo veljavnost trditve $T(k+1)$

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2. \qquad (2)$$

Upoštevamo (1) v (2) in dobimo

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

To dokaže pravilnost indukcijskega koraka in s tem veljavnost vseh trditev $T(n)$. $\square$

Naloga: Dokaži, da za vsoto prvih nekaj kubov naravnih števil velja zveza

$$0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Naloga: Zaporedje Fibonaccijevih števil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots,$$

je definirano z začetnima členoma, $f_0=0$, $f_1=1$, in rekurzivno zvezo

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, \text{ ki velja za } n\geq 2. \qquad (3)$$

Pokaži, da je Fibonaccijevo število f_{3n} vedno sodo.

Rešitev:

- *Indukcijska predpostavka:*
  $T(n)\ldots$ število f_{3n} je sodo.
- *Baza indukcije:*
  $T(0)\ldots$ število $f_{3\cdot 0}=f_0=0$ je sodo. ✓
- *Indukcijski korak:*
  Če je število f_{3k} sodo, potem je tudi število $f_{3(k+1)}=f_{3k+3}$ sodo.

Privzamemo torej veljavnost trditve $T(k)$, tj.

$$f_{3k} \text{ je sodo.} \tag{4}$$

Preveriti moramo veljavnost trditve $T(k+1)$, tj.

$$f_{3k+3} \text{ je sodo.} \tag{5}$$

Ideja: Izraz f_{3k+3} želimo preoblikovati na način, da se bo v izrazu pojavil f_{3k} in bomo lahko uporabili (4). Edina smiselna pot je uporaba rekurzivne zveze (3).

Računamo:

$$f_{3k+3} = f_{3k+2} + f_{3k+1}. \tag{6}$$

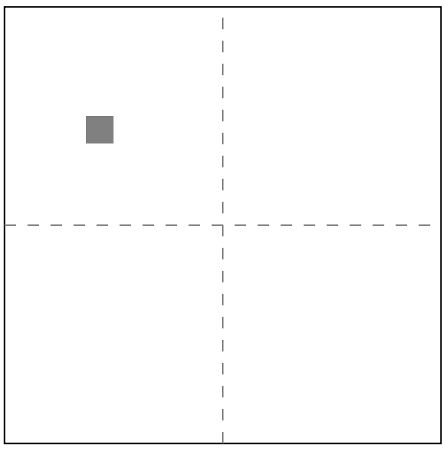
Ker se še ni pojavil f_{3k} v (6), nadaljujemo s preoblikovanjem s pomočjo (3):

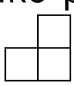
$$f_{3k+3} = (f_{3k+1} + f_{3k}) + f_{3k+1} = \underbrace{2f_{3k+1}}_{\text{sodo}} + \underbrace{f_{3k}}_{\text{sodo}}. \tag{7}$$

Ker je vsota sodih števil sodo število, iz (7) res sledi, da je f_{3k+3} sodo število. $\square$

Za zabavo: Indukcija je uporabna tudi v kombinatoriki

Naloga: Iz šahovnice velikosti $2^n \times 2^n$ izrežemo eno kvadratno polje.



Pokaži, da lahko takó preluknjano igralno ploščo tlakujemo s **triominami** oblike .

Rešitev:

- *Indukcijska predpostavka:*
  $T(n)\ldots$ preluknjano $2^n \times 2^n$ šahovnico lahko pokrijemo s triominami.

- *Baza indukcije:*
  $T(1)\ldots$ preluknjano 2×2 šahovnico lahko pokrijemo s triominami. ✓

- *Indukcijski korak:*
  Če lahko pokrijemo s triominami preluknjano $2^k \times 2^k$ šahovnico, potem lahko pokrijemo s trinominami tudi preluknjano $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ šahovnico.

  Trinomino lahko postavimo tako, da imamo za pokriti še 4 preluknjane $2^k \times 2^k$ šahovnico. Te pa po predpostavki lahko pokrijemo. Torej lahko pokrijemo tudi začetno šahovnico. □

Izjave

Izjava je trditev, ki je bodisi *resnična* (ima vrednost 1) bodisi *neresnična* (ima vrednost 0). Ponavadi jih bomo označevali z velikimi tiskanimi črkami: $A, B, C, \ldots, I_1, I_2, I_3, \ldots$.

Primer

Trditve, za katere ne moremo preveriti njihove resničnosti, niso izjave:

1. Prižgi luč! *2. Ta stavek ni resničen.*

Nekaj osnovnih izjav:

1. Zunaj sije Sonce. *2. Peter se vozi s kolesom.*

Nekaj sestavljenih izjav:

1. Ni res, da zunaj sije Sonce.
2. Peter se vozi s kolesom in zunaj sije Sonce.
3. Peter se vozi s kolesom ali zunaj sije Sonce.
4. Če zunaj sije Sonce, potem se Peter vozi s kolesom.
5. Peter se vozi s kolesom, če in samo če zunaj sije Sonce.

Izjavni vezniki

Iz izjav gradimo nove izjave s pomočjo *izjavnih veznikov* (tudi *izjavnih povezav, logičnih veznikov*). Pomen izjavnih veznikov določimo s pomočjo *resničnostnih tabel*.

Nekaj osnovnih izjavnih veznikov:

- *enomestni*:
  - *negacija* izjave A, $\neg A$, beremo "*Ne A*".
  - $\neg A$ je resnična natanko tedaj, ko je A neresnična:

A	$\neg A$
0	1
1	0

- *dvomestni*: (definicije so na naslednji strani)
  - *konjunkcija* $\wedge$
  - *disjunkcija* $\vee$ in *ekskluzivna disjunkcija* $\veebar$
  - *implikacija* $\Rightarrow$
  - *ekvivalenca* $\Leftrightarrow$
- *večmestni*

Osnovni dvomestni vezniki

Naj bosta A in B izjavi. Tvorimo nove izjave $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \veebar B$, $A \Rightarrow B$ in $A \Leftrightarrow B$ na naslednji način:

- $A \wedge B$ beremo kot "*A in B*" in je resnična ntk tedaj, ko sta A in B resnični.
- $A \vee B$ beremo kot "*A ali B*" je resnična ntk tedaj, ko je vsaj ena od izjav A ali B resnična.
- $A \veebar B$ beremo kot "*Ali A ali B*" je resnična ntk tedaj, ko je natanko ena od izjav A ali B resnična.
- $A \Rightarrow B$ beremo kot "*Iz A sledi B*" oz. "*A implicira B*" oz. "*Če A potem B*" je neresnična ntk tedaj, ko je A resnična, B pa ne.
- $A \Leftrightarrow B$ beremo kot "*A natanko tedaj, ko B*" oz. "*A ekvivalentno B*" oz. "*A, če in samo če B*" je resnična ntk tedaj, ko ~~je vsaj ena od izjav A ali B resnična~~.
  imata A in B isto logično vrednost.

Resničnostne tabele osnovnih dvomestnih veznikov

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \bigoplus B$
1	1	1	1	0	1	1	?
1	0	0	1	1	0	0	?
0	1	0	1	1	1	0	?
0	0	0	0	0	1	1	?

Na mestih ? v tabeli obstaja $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ možnih različnih izbir 0 in 1. Vsaka taka določa nek dvomestni izjavni veznik $\bigoplus$, tako da je teh natanko 16.

Dogovor o prednostnem redu veznikov

Če ni z oklepaji drugače označeno, potem je prednostni red izjavnih veznikov naslednji:

1. *Negacija* veže močneje kot *konjunkcija*, *konjunkcija* veže močneje kot *disjunkcija*, *disjunkcija* veže močneje kot implikacija in implikacija veže močneje kot **ekvivalenca**.

$\neg$	$\wedge$	$\vee$ $\veebar$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$

2. Istovrstni (dvomestni) vezniki vežejo od **leve proti desni**.

Primer

Črke P, Q, R označujejo neke izjave. V skladu z zgornjim dogovorom velja:

$$\begin{aligned}
\neg P \vee Q \wedge R &\sim (\neg P) \vee (Q \wedge R) \\
P \Rightarrow Q \wedge R \vee \neg S &\sim P \Rightarrow ((Q \wedge R) \vee (\neg S)) \\
P \Leftrightarrow Q \Rightarrow R \wedge \neg S &\sim P \Leftrightarrow (Q \Rightarrow (R \wedge (\neg S)))
\end{aligned}$$

Izjavni izrazi - matematična formalizacija izjav

Izjavne izraze definiramo induktivno z naslednjimi pravili:

1. *Izjavni konstanti* 0 in 1, ki jima pravimo tudi *laž* in *resnica*, sta izjavna izraza.
2. *Izjavne spremenljivke* $p, q, r, \ldots$, ki imajo lahko vrednost 0 ali 1, so izjavni izrazi.
3. Če je A izjavni izraz, potem je tudi $(\neg A)$ izjavni izraz.
4. Če sta A in B izjavna izraza, potem so tudi
$$A \wedge B\,, \quad A \vee B\,, \quad A \Rightarrow B \quad \text{in} \quad A \Leftrightarrow B$$
izjavni izrazi.

Primer

Primeri izjavnih izrazi so

$$1 \Rightarrow p, \qquad q \wedge r, \qquad (1 \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \wedge r).$$

Resničnostna tabela

Resničnost izjavnih izrazov najlažje podamo s pomočjo *resničnostne tabele*. Gre za tabelo, v kateri za vsak nabor logičnih vrednosti izjavnih spremenljivk zapišemo logično vrednost izjavnega izraza.

Primer

Naj bodo p, q, r izjavne spremenljivke. Določimo resničnostno tabelo izraza

$$p \wedge \neg q \Rightarrow r.$$

Najprej z oklepaji nakažimo vrstni red računanja:

$$p \wedge \neg q \Rightarrow r \quad \sim \quad ((p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r).$$

V tabeli vsaki spremenljivki p, q, r, vsakemu vmesnemu izrazu $\neg q$, $p \wedge (\neg q)$ in končnemu izrazu $((p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r)$ pripada po en stolpec.

Primer

V resničnostni tabeli imamo $2^{\text{število spremenljivk}}$ *vrstic, pri čemer vsaka predstavlja eno od možnih kombinacij 0 in 1.*

Postopoma računamo vrednosti izrazov v tabeli od leve proti desni.

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$	$(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1

Na koncu nas zanimajo samo vrednosti v zadnjem stolpcu tabele. Vsi stolpci med stolpci s spremenljivkami in zadnjim stolpcem so zgolj pomožni.

Število različnih resničnostnih tabel je 2^{2^n}

Naj bodo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ izjavne spremenljivke.

Vprašanje. Koliko različnih izjavnih izrazov I, ki vsebujejo spremenljivke p_i obstaja, če dva izjavna izraza štejemo za enaka natanko tedaj, ko imata iste vrednosti v zadnjem stolpcu pripadajočih resničnostnih tabel?

Premislek.

- Ker vmesni stolpci v končnem izračunu niso pomembni, ima resničnostna tabela $n+1$ stolpcev, tj. po enega za vsako od spremenljivk in enega za izraz I.
- Ker je različnih kombinacij 1 in 0 v stolpcih spremenljivk p_i natanko 2^n, ima tabela 2^n vrstic.
- V zadnjem stolpcu vsake vrstice resničnostne tabele je katera koli od vrednosti 1 ali 0. Torej imamo 2 možnosti v vsaki vrstici. Skupaj:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{\text{št. vrstic}} = 2^{\text{št. vrstic}} = 2^{2^n}.$$

Enakovredni izjavni izrazi

- Izjavni izraz, ki ima v vseh vrsticah resničnostne tabele vrednost 1, imenujemo *tavtologija*.
- Izjavni izraz, ki ima v vseh vrsticah resničnostne tabele vrednost 0, imenujemo *protislovje*.
- Vse ostale izjavne izraze imenujmo *nevtralni izjavni izrazi*.

Dva izjavna izraza I in J sta *enakovredna*, če se ujemata v zadnjem stolpcu resničnostne table. To zapišemo na kratko kot $I \sim J$.

Bolj matematično to povemo kot:

Dva izjavna izraza I in J sta *enakovredna*, če se njuni vrednosti pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk ujemata.

Nekaj očitnih dejstev o enakovrednosti

Naj bodo I, J, K izjavni izrazi. Veljajo naslednje trditve:

- Izjavna izraza I in J sta enakovredna natanko tedaj, ko je izraz $I \Leftrightarrow J$ tavtologija.
- $I \sim I$.
- Če je $I \sim J$, potem je $J \sim I$.
- Če je $I \sim J$ in $J \sim K$, potem je $I \sim K$.

Zgornje lastnosti so zelo uporabne, več o tem bomo videli v poglavju *Relacije*.

Zakoni izjavnega računa

Nekateri pari enakovrednih izjavnih izrazov imajo posebna imena.
To so **zakoni izjavnega računa**:

Dvojna negacija	$\neg\neg A \sim A$
Idempotenca	$A \wedge A \sim A$ $A \vee A \sim A$
Komutativnost	$A \wedge B \sim B \wedge A$ $A \vee B \sim B \vee A$ $A \Leftrightarrow B \sim B \Leftrightarrow A$
Asociativnost	$(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$ $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \sim A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$
Absorpcija	$\boxed{A \vee (A \wedge B) \sim A}$ $\boxed{A \wedge (A \vee B) \sim A}$

Naloga

Dokaži veljavnost absorpcije.

Zakoni izjavnega računa

Distributivnost	$\boxed{A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$ $\boxed{A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$
de Morganova zakona	$\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$
Kontrapozicija	$A \Rightarrow B \sim \neg B \Rightarrow \neg A$
Tavtologija in protislovje	$A \Rightarrow A \sim 1$ $A \vee \neg A \sim 1$ $A \Leftrightarrow A \sim 1$ $A \wedge \neg A \sim 0$
Lastnosti implikacije	$A \Rightarrow B \sim \neg A \vee B$ $\neg(A \Rightarrow B) \sim A \wedge \neg B$
Lastnosti ekvivalence	$A \Leftrightarrow B \sim (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ $A \Leftrightarrow B \sim (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ $\neg(A \Leftrightarrow B) \sim \neg A \Leftrightarrow B$

Naloga

Dokaži distributivnostni in de Morganova zakona.

Naloga

Poišči izjavni izraz A s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Disjunktivna normalna oblika

Osnovna konjunkcija je konjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij:

$$p \wedge (\neg q) \wedge r \wedge \ldots \wedge t.$$

Disjunktivna normalna oblika (DNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{DNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{DNO}$
- A_{DNO} je disjunkcija osnovnih konjunkcij.

Recept: A_{DNO} *lahko* zgradimo na naslednji način:

- Za vsako vrstico resničnostne tabele, v kateri ima A vrednost 1, pripravimo osnovno konjunkcijo.
- V njej zapišemo spremenljivke z vrednostjo 1 in zanikamo tiste z vrednostjo 0.

Disjunktivna normalna oblika

Naloga

Zapiši DNO izjavnega izraza A z resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Konjunktivna normalna oblika

Osnovna disjunkcija je disjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij:

$$p \vee (\neg q) \vee r \vee \ldots \vee t.$$

Konjunktivna normalna oblika (KNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{KNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{KNO}$
- A_{KNO} je konjunkcija osnovnih disjunkcij.

Recept: A_{KNO} *lahko* zgradimo na naslednji način:

- Za vsako vrstico resničnostne tabele, v kateri ima A vrednost 0, pripravimo osnovno disjunkcijo.
- V njej zapišemo spremenljivke z vrednostjo 0 in zanikamo tiste z vrednostjo 1.

DNO in KNO

Naloga

Zapiši KNO izjavnega izraza A z resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Naloga

Vsak izjavni izraz ima DNO in vsak izjavni izraz ima KNO.

Naloga

Za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Polni nabori izjavnih veznikov

Družina izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ je **poln nabor izjavnih veznikov**, če za vsak izjavni izraz A obstaja

enakovreden izjavni izraz B,

ki vsebuje samo

veznike iz $\mathcal{N}$.

Kako v praksi pokazati, da je nabor izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ poln?

1. Izberemo znan poln nabor izjavnih veznikov $\mathcal{Z}$.
2. Vsak veznik iz znanega nabora $\mathcal{Z}$ izrazimo samo z uporabo veznikov iz $\mathcal{N}$.

Primer

Nekaj polnih naborov izjavnih veznikov:

- $\{\neg, \wedge, \vee\}$.
- $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$,$\{\neg, \Rightarrow\}$, $\{0, \Rightarrow\}$.

Nabor $\{\Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ ni poln.

Sklepanje v izjavnem računu

Kateri sklepi so pravilni?

1.

Predpostavki:	1.	*Če dežuje, je oblačno.*
	2.	*Dežuje.*
Zaključek:	3.	*Oblačno je.*

2.

Predpostavke:	1.	*Ta žival ima krila ali pa ni ptič.*
	2.	*Če je ta žival ptič, potem leže jajca.*
	3.	*Ta žival nima kril.*
Zaključek:	4.	*Torej ta žival ne leže jajc.*

3.

Predpostavke:	1.	*Io je Jupitrov satelit.*
	2.	*Titan je Saturnov satelit.*
Zaključek:	3.	*Zemlja je tretji planet od Sonca.*

Formalizacija

1.

dežuje	...	d
oblačno je	...	o

1. $d \Rightarrow o$
2. d

---

3. o

2.

ta žival ima krila	...	k
ta žival je ptič	...	p
ta žival leže jajca	...	j

1. $k \vee \neg p$
2. $p \Rightarrow j$
3. $\neg k$

---

4. $\neg j$

Pravilen sklep

Zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ je **pravilen sklep** s **predpostavkami** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in **zaključkom** B, če je

zaključek B **resničen**

pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so

resnične vse predpostavke.

Pišemo:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B.$$

Beremo:

Iz predpostavk $A_1, A_2, \ldots, A_n$ logično sledi zaključek B.

Četrti zgled

Predpostavke:	1.	*Šel bom na tekmo, zvečer pa bom naredil domačo nalogo.*
	2.	*Če grem na tekmo in nato še v kino, zvečer ne bom mogel narediti domače naloge.*
Zaključek:	3.	*Ne morem iti v kino.*

Ta sklep je pravilen.

Formalizacija:

grem na tekmo	...	t	1.	$t \wedge d$
grem v kino	...	k	2.	$t \wedge k \Rightarrow \neg d$
naredim domačo nalogo	...	d	3.	$\neg k$

Nepravilen sklep

Kako pokažemo, da sklep ni pravilen?

Poiščemo **protiprimer**, tj. nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerem so vse predpostavke resnične, zaključek pa ne.

Primer

ta žival ima krila ... k
ta žival je ptič ... p
ta žival leže jajca ... j

$$\begin{array}{ll} 1. & k \vee \neg p \\ 2. & p \Rightarrow j \\ 3. & \neg k \\ \hline 4. & \neg j \end{array}$$

Nepravilen sklep

ta žival ima krila ... k
ta žival je ptič ... p
ta žival leže jajca ... j

$$\begin{array}{ll} 1. & k \vee \neg p \\ 2. & p \Rightarrow j \\ 3. & \neg k \\ \hline 4. & \neg j \end{array}$$

Vstavimo $k \sim 0$, $p \sim 0$ in $j \sim 1$ ter pridelamo:

$$\begin{array}{rcc} k \vee \neg p & \sim & 1 \\ p \Rightarrow j & \sim & 1 \\ \neg k & \sim & 1 \\ \hline \neg j & \sim & 0 \end{array}.$$

Protiprimer je žival, ki

- nima kril,
- ni ptič in
- leže jajca.

Pravilen sklep

Izrek

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$$

natanko tedaj, ko je izjavni izraz

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$$

tavtologija.

Izrek

- *Če je $B \sim C$, potem $A \models B$ natanko tedaj, ko $A \models C$.*
- *Če z 1 označimo tavtologijo, potem $A \models 1$.*
- *Velja $A_1, A_2, \ldots, A_n \models A_k$ (za $k \in \{1, \ldots, n\}$).*
- *Če z 1 označimo tavtologijo, potem $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ natanko tedaj, ko $A_1, A_2, \ldots, A_n, 1 \models B$.*

Pravila sklepanja

$A, A \Rightarrow B \models B$	**modus ponens (MP)**
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	**modus tollens (MT)**
$A \vee B, \neg B \models A$	**disjunktivni silogizem (DS)**
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	**hipotetični silogizem (HS)**
$A, B \models A \wedge B$	**združitev (Zd)**
$A \wedge B \models A$	**poenostavitev (Po)**
$A \models A \vee B$	**pridružitev (Pr)**

Pravilom sklepanja pravimo tudi **osnovni pravilni sklepi**.

Dokaz pravilnosti sklepa

Pravilnost sklepa

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$$

pokažemo tako, da sestavimo zaporedje izjavnih izrazov

$$C_1, C_2, \ldots, C_m,$$

kjer je

$$C_m = B$$

in za $i = 1, 2, \ldots, m$ velja:

(a) C_i je ena od **predpostavk** ali

(b) C_i je **tavtologija** ali

(c) C_i je **enakovreden** enemu od predhodnih izrazov v zaporedju ali

(d) C_i **logično sledi** iz predhodnih izrazov po enem od osnovnih pravilnih sklepov.

Zgled

Ali iz predpostavk $p \Rightarrow q, p \vee r, q \Rightarrow s, r \Rightarrow t, \neg s$ sledi t?

1.	$p \Rightarrow q$	predpostavka
2.	$p \vee r$	predpostavka
3.	$q \Rightarrow s$	predpostavka
4.	$r \Rightarrow t$	predpostavka
5.	$\neg s$	predpostavka
6.	$p \Rightarrow s$	HS(1,3)
7.	$\neg p$	MT(6,5)
8.	r	DS(2,7)
9.	t	MP(4,8)

Zgledi

Primer

1. *Ali iz predpostavk*

   1. *Če sije sonce, nosim sončna očala.*
   2. *Nosim kapo ali sončna očala.*
   3. *Sončnih očal ne nosim.*

   sledi zaključek

   Nosim kapo in sonce ne sije.

2. *Ali iz predpostavk* $p, \neg p$ *sledi* q*?*
3. *Pokaži, da iz predpostavk* $p \Rightarrow q \vee r$ *in* $\neg r$ *logično sledi zaključek* $p \Rightarrow q$.

Pomožni sklep - pogojni sklep

Pogojni sklep (PS) uporabljamo, kadar ima zaključek sklepa obliko implikacije.

Izrek

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \models B \Rightarrow C$$

natanko tedaj, ko

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B \models C.$$

Primer

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ *in* $\neg r$ *logično sledi zaključek* $p \Rightarrow q$.

Zgled napačne uporabe pogojnega sklepa

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek q.

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	predpostavka
2.	$\neg r$	predpostavka
3.1.	p	predpostavka PS
3.2.	$q \vee r$	MP(1,3.1)
3.3.	q	DS(3.2,2)
3.	$p \Rightarrow q$	PS(3.1,3.3)
4.	q	DS(2,3.2)

Sklep je napačen, saj je nabor vrednosti $p \sim q \sim r \sim 0$ protiprimer. Po zaključku pogojnega sklepa, ne smemo uporabljati zamaknjenih vrstic.

Pomožni skelp - sklep s protislovjem

Sklep s protislovjem (RA) lahko uporabljamo kadarkoli.

Izrek

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \models B$$

natanko tedaj, ko

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B \models 0.$$

Primer

Pokaži, da iz $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$, $s \wedge q \Rightarrow r$ in s sledi $\neg p$.

Pomožni sklep - analiza primerov

Analizo primerov (AP) lahko uporabljamo, kadar ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

Izrek

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \vee B_2 \models C$$

natanko tedaj, ko

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \models C$$

in

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_2 \models C.$$