1. Za $\mathbf{x} = [x,y]^\mathsf{T}$ poišči splošne rešitve sistemov diferencialnih enačb $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ za naslednje matrike:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   S pomočjo octave-a nariši fazne slike (tire rešitev za več različnih začetnih pogojev) za vsakega od zgornjih sistemov. Kako lastne vrednosti matrike A vplivajo na obnašanje rešitev?

2. (a) Poišči splošno rešitev $y(t)$ diferencialne enačbe
$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 0.$$
   (b) Poišči posebno rešitev $y_p(t)$ diferencialne enačbe
$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = e^{-t}$$
   in s pomočjo točke (a) zapiši splošno rešitev $y(t)$ te enačbe.

   (c) Reši še začetni problem
$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = e^{-t},\, y(0) = 1,\, \dot{y}(0) = 2.$$

3. Poišči rešitev $y(t)$ začetnega problema
$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 5t + 7,\;\; y(0) = 2,\, \dot{y}(0) = 0.$$

4. Poišči splošno rešitev $y(t)$ diferencialne enačbe
$$\dddot{y} + \ddot{y} - 2y = 2t^2.$$

5. Van der Pol-ov oscilator je dinamični sistem z nelinearnim dušenjem, ki zadošča diferencialni enačbi 2. reda
$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$
   (a) Zapiši to diferencialno enačbo 2. reda kot sistem diferencialnih enačb 1. reda (z uvedbo nove spremenljivke $y = \dot{x}$). Nariši fazno sliko tega sistema za $\mu = 1$ in nekaj izbranih začetnih pogojev.

   (b) Poišči stacionarne točke dobljenega sistema 1. reda in poračunaj lastne vrednosti Jacobijeve matrike desne strani v stacionarnih točkah. (Pomagaj si z octave-om.) Kaj ugotoviš?

   (c) Poišči začetni pogoj $[x(0), \dot{x}(0)]^\mathsf{T}$, za katerega je $y(0) = \dot{x}(0) = 0$, ki opisuje periodično rešitev tega sistema diferencialnih enačb, tj. poišči *limitni cikel* tega sistema. (Začni z $x(0) = x_0 > 0$ in $\dot{x}(0) = 0$, nato pa poišči x_1, pri katerem tir gibanja ponovno seka poltrak $x \geq 0, y = 0$. S tem je opisana funkcija $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $x_0 \mapsto x_1$. Poiskati moraš fiksno točko te funkcije, tj. rešiti enačbo $f(x) = x$.)

6. Obravnavati želimo spodnji sistem nelinearnih diferencialnih enačb 1. reda:

$$\dot{x} = -y - z,$$
$$\dot{y} = x + ay,$$
$$\dot{z} = b + z(x - c),$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$. (Ta sistem je znan kot *Rösslerjev atraktor*.) Če ni drugače zapisano, bomo za vrednosti parametrov vzeli $a = 0.2$, $b = 0.2$ ter $c = 5.7$.

(a) Za različne začetne pogoje poišči numerične rešitve tega sistema in jih nariši z octave-om. Uporabi rk4. Poskusi kvalitativno oceniti obnašanje.

(b) Če funkcije x, y in z zložimo v vektor $\mathbf{x} = [x, y, z]^\mathsf{T}$, lahko sistem zapišemo v strnjeni obliki $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, kjer je $\mathbf{F}$ funkcija določena z desno stranjo. (Sistemu diferencialnih enačb, pri katerem funkcija $\mathbf{F}$ na desni strani ni odvisna od t, pravimo *avtonomen*.) Poišči stacionarne točke tega avtonomnega sistema diferencialnih enačb. (To so točke, v katerih velja $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.) Lahko si pomagaš z Mathematico.

(c) Če je $\mathbf{x}$ blizu stacionarne točke $\mathbf{x}_0$, potem je $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \doteq J\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Sistem diferencialnih enačb $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ lahko torej v bližini stacionarne točke $\mathbf{x}_0$ aproksimiramo s sistemom linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti $\dot{\mathbf{u}} = J\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$, kjer je $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $J\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ za prej izračunane stacionarne točke. Kako te lastne vrednosti vplivajo na obnašanje sistema v bližini stacionarnih točk?

(d) Tokrat bomo parametre postavili na $a = 0.1$, $b = 0.1$ in $c = 4$, 12.8 ali 14. Recimo, da je naš začetni pogoj oblike $[0.1, y_0, z_0]^\mathsf{T}$ (začnemo torej na ravnini z enačbo $x = 0.1$). Naj bo $[0.1, y_1, z_1]^\mathsf{T}$ točka na ravnini $x = 0.1$, v kateri rešitev (prvič) ponovno seka ravnino $x = 0.1$. Preslikavi $\mathbf{P}$ določeni s predpisom $\mathbf{P}([y_0, z_0]^\mathsf{T}) = [y_1, z_1]^\mathsf{T}$ pravimo *Poincaréjeva preslikava*. Poišči sliko Poincaréjeve preslikave tega sistema (presek tira z ravnino $x = 0.1$).

7. Sistemu linearnih diferencialnih enačb

$$\dot{x} = a(y - x),$$
$$\dot{y} = cx - xz,$$
$$\dot{z} = xy - bz,$$

kjer je $a = 10$, $b = 8/3$ in $c = 16$, pravimo Pan–Xu–Zhou-jev atraktor. (Podoben je Lorenz-ovemu atraktorju.)

(a) Poišči stacionarne točke tega avtonomnega sistema in opiši obnašanje rešitev v bližini teh stacionarnih točk. Pomagaj si z octave-om.

(b) Numerično (z uporabo rk4) poišči nekaj rešitev tega sistema. Začetne pogoje postavi v bližino stacionarnih točk, na z-os, blizu z-osi. Kdaj se sistem obnaša kaotično?