POMOŽNI SKLEPI

Načeloma za dokazovanje pravilnosti sklepa zadošča standardnih sedem pravis sklepanja (MP, MT, DS, HS, Zd, Po in Pr). Vendar si lahko z uporabo pomožnih sklepov: *pogojnega sklepa* PS, *sklepa s protislovjem* RA in *analize primerov* AP olajšati delo.
Omenjene pomožne sklepe bomo spoznali na *pravilnem sklepu*

$$\neg(p \wedge q)\,,\; r \Rightarrow q\,,\; r \vee s \quad \models \quad p \Rightarrow s. \tag{1}$$

Sklep lahko dokazujemo brez pomagal:

1.	$\neg(p \wedge q)$	predpostavka
2.	$r \Rightarrow q$	predpostavka
3.	$r \vee s$	predpostavka
4.	$\neg p \vee \neg q$	$\sim$(1)
5.	$p \Rightarrow \neg q$	$\sim$(4)
6.	$\neg q \Rightarrow \neg r$	$\sim$(2)
7.	$p \Rightarrow \neg r$	HS(5,6)
8.	$\neg\neg r \vee s$	$\sim$(3)
9.	$\neg r \Rightarrow s$	$\sim$(8)
10.	$p \Rightarrow s$	HS(7,9)

Pri tem smo na kar nekaj korakih uporabili enakovrednost izraza z enim od prejšnjih.

Pogojni sklep

Pogojni sklep uporabljamo v primerih, ko ima zaključek obliko implikacije. Tudi disjunkcijo lahko razumemo kot eno izmed variant implikacije. Mehanizem pogojnega sklepa je skrit v naslednji trditvi.

Trditev 1 (pogojni sklep — PS) *$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B \Rightarrow C$ natanko tedaj, ko $A_1, A_2, \ldots, A_n, B \models C$.*

Dokaz. Dovolj je pokazati, da sta izraza

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

in

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B) \Rightarrow C$$

enakovredna. Zakaj? V tem primeru je namreč eden izmed njiju tavtologija natanko tedaj, ko je tavtologija tudi drugi izraz. To pa pomeni, da je eden izmed v trditvi omenjenih sklepov pravilen natanko tedaj, ko je pravilen drugi.
Vpeljimo oznako $\mathcal{A} = (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ in računajmo:

$$\begin{aligned}
(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow (B \Rightarrow C) &\sim \\
\mathcal{A} \Rightarrow (B \Rightarrow C) &\sim \\
\neg\mathcal{A} \vee \neg B \vee C &\sim \\
\neg(\mathcal{A} \wedge B) \vee C &\sim \\
(\mathcal{A} \wedge B) \Rightarrow C &\sim \\
(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B) \Rightarrow C &
\end{aligned}$$

∎

Dokažimo pravilnost sklepa (1):

1.	$\neg(p \wedge q)$	predpostavka
2.	$r \Rightarrow q$	predpostavka
3.	$r \vee s$	predpostavka
4.	$\neg p \vee \neg q$	$\sim$(1)
5.1	p	predpostavka PS
5.2	$\neg q$	DS(4,5.1)
5.3	$\neg r$	MT(2,5.2)
5.4.	s	DS(3,5.3)
5.	$p \Rightarrow s$	PS(5.1,5.4)

Sklep s protislovjem

Sklep s protislovjem lahko uporabljamo pri kakršnemkoli zaključku sklepa. Naslednja trditev utemeljuje sklep s protislovjem.

Trditev 2 (sklep s protislovjem — RA) *$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ natanko tedaj, ko $A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B \models 0$.*

Dokaz. Dovolj je, primerjaj utemeljitev pri dokazu prejšnje trditve, pokazati, da sta izraza

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$$

in

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B) \Rightarrow 0$$

enakovredna.
Reciklirajmo oznako $\mathcal{A} = (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ in računajmo:

$$\begin{aligned}
(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B) \Rightarrow 0 \sim \\
(\mathcal{A} \wedge \neg B) \Rightarrow 0 \sim \\
\neg(\mathcal{A} \wedge \neg B) \vee 0 \sim \\
\neg(\mathcal{A} \wedge \neg B) \sim \\
\neg\mathcal{A} \vee B \sim \\
\mathcal{A} \Rightarrow B \sim \\
(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B
\end{aligned}$$

■

Dokažimo pravilnost sklepa (1) z uporabo RA:

1.	$\neg(p \wedge q)$	predpostavka
2.	$r \Rightarrow q$	predpostavka
3.	$r \vee s$	predpostavka
4.	$\neg p \vee \neg q$	$\sim$(1)
5.1	$\neg(p \Rightarrow s)$	predpostavka RA
5.2	$p \wedge \neg s$	$\sim$(5.1)
5.3	p	Po(5.2)
5.4	$\neg s$	Po(5.2)
5.5	$\neg q$	DS(4,5.3)
5.6.	$\neg r$	MT(2,5.5)
5.7	s	DS(3,5.6)
5.8	$s \wedge \neg s \sim 0$	Zd(5.7,5.4)
5	$p \Rightarrow s$	RA(5.1,5.8)

Analiza primerov

Analizo primerov uporabljamo, ko ima katera izmed predpostavk obliko disjunkcije. Ker lahko tavtologijo 1 *vedno* vtaknemo med predpostavke, in jo nadomestimo z enakovrednim izrazom $p \vee \neg p$, imamo, vsaj v principu, med predpostavkami vedno lahko takšno, ki ustreza zahtevi.

Trditev 3 (analiza primerov — AP) *$A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1 \vee B_2 \models C$ natanko tedaj, ko $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1 \models C$ in $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_2 \models C$.*

Dokaz. Pokazati je potrebno, da je izraz

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge (B_1 \vee B_2)) \Rightarrow C \tag{2}$$

tavtologija natanko tedaj, ko sta tavtologiji oba izraza

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B_1) \Rightarrow C \quad \text{in} \quad (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B_2) \Rightarrow C. \tag{3}$$

Zadosti pa je že pokazati, da je izraz (2) enakovreden konjunkciji izrazov (3). Ponovno označimo $\mathcal{A} = (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ in računajmo:

$$\begin{aligned}
(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge (B_1 \vee B_2)) \Rightarrow C &\sim \\
(\mathcal{A} \wedge (B_1 \vee B_2)) \Rightarrow C &\sim \\
\neg(\mathcal{A} \wedge (B_1 \vee B_2)) \vee C &\sim \\
\neg\mathcal{A} \vee \neg(B_1 \vee B_2)) \vee C &\sim \\
\neg\mathcal{A} \vee (\neg B_1 \wedge \neg B_2)) \vee C &\sim \\
(\neg\mathcal{A} \vee \neg B_1 \vee C) \wedge (\neg\mathcal{A} \vee \neg B_2 \vee C) &\sim \\
\neg(\mathcal{A} \wedge B_1) \vee C \wedge \neg(\mathcal{A} \wedge B_2) \vee C &\sim \\
(\mathcal{A} \wedge B_1) \Rightarrow C \wedge \neg(\mathcal{A} \wedge B_2) \Rightarrow C &\sim \\
(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B_1) \Rightarrow C \wedge (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge B_2) \Rightarrow C.
\end{aligned}$$

■

Še dokaz pravilnosti sklepa (1) z uporabo analize primerov, številčenje je v tem primeru nekoliko bolj zapleteno:

1.	$\neg(p \wedge q)$	predpostavka
2.	$r \Rightarrow q$	predpostavka
3.	$r \vee s$	predpostavka
4.	$\neg p \vee \neg q$	$\sim$(1)
5.1.1	r	predpostavka AP_1
5.1.2	q	MP(5.1.1,2)
5.1.3	$\neg p$	DS(5.1.2,1)
5.1.4	$\neg p \vee s$	Pr(5.1.3)
5.2.1	s	predpostavka AP_2
5.2.2.	$\neg p \vee s$	Pr(5.2.1)
5.	$\neg p \vee s$	AP(3,5.1,5.2)
6.	$p \Rightarrow s$	$\sim$(5)

Pri tem številčenje AP(3,5.1,5.2) pomeni, da smo analizo primerov AP uporabili na disjunkciji v 3. vrstici dokaza, obe možnosti analize primerov pa nastopata v vejah 5.1 in 5.2.