Osnove matematične analize

Osmi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

6. december 2020

Odvodi funkcije dveh spremenljivk

Parcialna odvoda funkcije dveh spremenljivk $f(x, y)$ v točki (a, b) definiramo kot

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

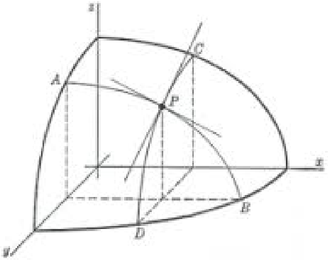
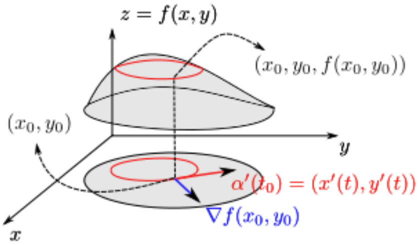


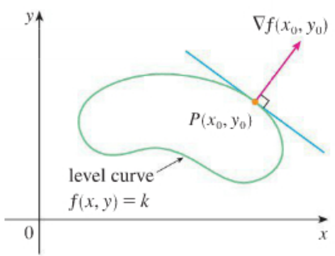
Fig. 1

Gradient funkcije v (x, y)

Gradient funkcije $f(x, y)$ v točki (x_0, y_0) je vektor

$$\mathrm{grad} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$





Pomen gradienta

Parcialni odvod po x v točki (x_0, y_0)

- je **relativna sprememba funkcijske vrednosti** pri zelo majhni spremembi spremenljivke x, kjer je neodvisna spremenljivka y fiksna,
- je **smerni koeficient tangente** pri x_0 na krivuljo, ki jo dobimo, če graf funkcije prerežemo vzdolž ravnine $y = y_0$,
- opisuje **gibanje funkcijskih vrednosti** (naraščanje ali padanje) ob majhnem premiku iz točke (x_0, y_0) v smeri osi x.

Parcialni odvodi funkcije n spremenljivk

Parcialni odvod funkcije n spremenljivk $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ po spremenljivki x_i v točki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ definiramo kot

$$\begin{aligned} f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n))}{h}. \end{aligned}$$

Gradient funkcije n spremenljivk $f(x_1, \ldots, x_n)$ v točki $(a_1, \ldots, a_n)$ je vektor v $\mathbb{R}^n$, ki ima za komponente vse parcialne odvode:

$$\mathrm{grad}\, f(a_1, \ldots, a_n) = (f_{x_1}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_{x_n}(a_1, \ldots, a_n)).$$

Za računanje parcialnih odvodov lahko uporabljamo pravila za odvajanje, pri čemer eno spremenljivko obravnavamo kot spremenljivko, ostale pa kot parametre (tj. konstante).

- $f(x,y) = \log(x + \sqrt{x^2+y^2})$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}$$

- $g(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$

$$g_x(x,y) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{-y}{x^2} = -\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$g_y(x,y) = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

- $h(x,y,z) = y\sin(x+2z)$

$h_x(x,y,z) = y\cos(x+2z)$, $h_y(x,y,z) = \sin(x+2z)$, $h_z(x,y,z) = 2y\cos(x+2z)$.

Diferenciabilnost funkcije dveh spremenljivk

Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je **diferenciabilna** v točki (a, b), če je

$$f(a + h_1, b + h_2) = f(a, b) + f_x(a, b)h_1 + f_y(a, b)h_2 + o(h_1, h_2),$$

kjer je $o : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija, ki zadošča

$$\lim_{h_1^2 + h_2^2 \to 0} \frac{o(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0. \tag{1}$$

Pogoj (1) pomeni, da je vrednost funkcije $o(h_1, h_2)$ za majhne h_1, h_2 zanemarljiva v primerjavi z razdaljo točke (h_1, h_2) od izhodišča. Torej je za majhne h_1, h_2 funkcijska vrednost $f(a + h_1, b + h_2)$ približno

$$f(a, b) + f_x(a, b)h_1 + f_y(a, b)h_2.$$

Izrek

Če parcialna odvoda $f_x(a, b)$ in $f_y(a, b)$ v neki okolici točke (a, b) obstajata in sta zvezni funkciji, potem je funkcija f v točki (a, b) diferenciabilna.

Odvajanje funkcije dveh spremenljivk po parametru

Imamo naslednje podatke:

- $f(x,y)$ je parcialno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk v vsaki točki (x,y) iz množice $D \subset \mathbb{R}^2$, pri čemer sta parcialna odvoda $f_x(x,y)$ in $f_y(x,y)$ zvezni funkciji,
- $x(t)$ in $y(t)$ sta odvedljivi funkciji spremenljivke t, tako da je za vsak t točka $(x(t),y(t))$ v D.

Sestavljena funkcija

$$g(t) = f(x(t),y(t))$$

je odvedljiva in velja **verižno pravilo**:

$$\boxed{g'(t) = f_x(x(t),y(t))x'(t) + f_y(x(t),y(t))y'(t)}$$

Dokaz (Neobvezen, za radovedne). Predpostavke izreka o diferenciabilnosti so izpolnjene. Po izreku je

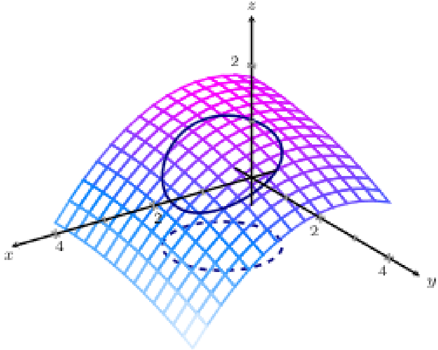
$$
\begin{aligned}
&f(x(t+h), y(t+h)) = f(x(t), y(t)) + \\
&+ (x(t+h) - x(t)) f_x(x(t), y(t)) + (y(t+h) - x(t)) f_y(x(t), y(t)) + o(h, h),
\end{aligned}
$$

kjer je $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{|h|\sqrt{2}} = 0$.
Sledi

$$
\begin{aligned}
&g'(t) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x(t+h) - x(t)) f_x(x(t), y(t)) + (y(t+h) - x(t)) f_y(x(t), y(t)) + o(h, h)}{h} \\
&= x'(t) f_x(x(t), y(t)) + y'(t) f_y(x(t), y(t)) + \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} \\
&= f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t).
\end{aligned}
$$

Odvajanje funkcije dveh spremenljivk po parametru

Funkcija $g(t)$ opisuje vrednosti $f(x, y)$ nad parametrizirano krivuljo $x = x(t), y = y(t)$, njen odvod $g'(t)$ pa spremembo funkcijske vrednosti $f(x, y)$ ob majhnem premiku vzdolž parametrizirane krivulje $x = x(t), y = y(t)$.



Primer. Iz točke $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ se malo premaknemo vzdolž enotske krožnice $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$. Ali bo vrednost funkcije $f(x,y) = 3 + x^2 - y^2$ ob tem narasla ali padla?

Funkcijsko vrednost pri gibanju po krožnici opisuje funkcija $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. Zanima nas $g'(t_0)$, kjer je $(\cos t_0, \sin t_0) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ oz. $t_0 = \frac{\pi}{3}$. Z verižnim pravilom dobimo

$$g'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0).$$

Velja

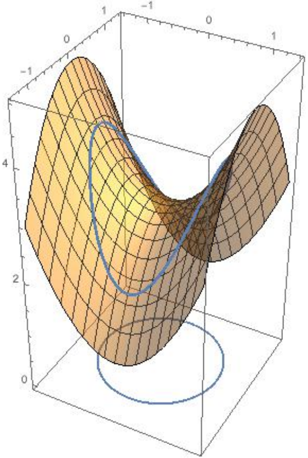
$$f_x(x,y) = 2x,\ f_y(x,y) = -2y \quad \text{in} \quad x'(t) = -\sin t,\ y'(t) = \cos t.$$

Torej

$$g'(t_0) = -2x(t_0)\sin t_0 - 2y(t_0)\cos t_0 = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\sqrt{3}.$$

Ker je $g'(t_0) < 0$, bo funkcijska vrednost padala.

Graf $f(x, y) = 3 + x^2 - y^2$



Odvajanje funkcije več spremenljivk po parametrih

Naj velja:

- Funkcija $f(x_1, \ldots, x_n)$ ima zvezne parcialne odvode po vseh spremenljivkah.
- Vsaka spremenljivka x_i je parcialno odvedljiva funkcija

$$x_i(t_1, \ldots, t_m) =: x_i(\underline{t}), \quad i = 1, \ldots, m,$$

  m novih skupnih spremenljivk.

Sestavljena funkcija

$$g(t_1, \ldots, t_m) = f(x_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_m))$$

je odvedljiva in velja **verižno pravilo** za odvajanje:

$$\boxed{g_{t_i}(\underline{t}) = \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(x_1(\underline{t}), \ldots, x_n(\underline{t}))(x_j)_{t_i}(\underline{t})}.$$

Primeri:

- Izračunajmo odvod funkcije $f(x) = x^x$ z uporabo verižnega pravila.

  Definirajmo funkcijo $g(x, y) = x^y$. Naj bo $x(t) = y(t) = t$ za $t \in \mathbb{R}$. Zanima nas odvod $f'(t)$ funkcije $f(t) = g(x(t), y(t)) = t^t$. Velja

  $$g_x(x, y) = yx^{y-1}, \; f_y(x, y) = \log x \cdot x^y \quad \text{in} \quad x'(t) = y'(t) = 1.$$

  Po verižnem pravilu sledi

  $$f'(t) = g_x(x(t), y(t))x'(t) + g_y(x(t), y(t))y'(t) = tt^{t-1} + \log t \cdot t^t = t^t(1 + \log t).$$

- Izračunajmo, direktno in s pomočjo verižnega pravila, odvod sestavljene funkcije $g(t) = f(x(t), y(t))$, kjer je $f(x, y) = x^2 + y^3$ in
  - $x(t) = \sin t, \; y(t) = \cos t,$

    Direktno:

    $$g(t) = \sin^2(t) + \cos^3 t \;\Rightarrow\; g'(t) = 2\sin t \cos t - 3\cos^2 t \sin t.$$

    Z verižnim pravilom

    $$\begin{aligned} g'(t) &= f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) \\ &= 2x(t)x'(t) + 3y(t)^2 y'(t) = 2\sin t \cos t - 3\cos t^2 \sin t. \end{aligned}$$

  - $x(t) = t, y(t) = 0,$

    $$g(t) = t^2 \;\Rightarrow\; g'(t) = 2t, \qquad g'(t) = 2x(t)x'(t) + 3y(t)^2 y'(t) = 2t.$$

Smerni odvod funkcije dveh spremenljivk

Funkcija $f = f(x, y)$ naj ima zvezne parcialne odvode na območju $D \subset \mathbb{R}^2$, naj bo $(x_0, y_0) \in D$ in naj bo

$$x(t) = x_0 + te_1, \quad y(t) = y_0 + te_2 \quad t \in \mathbb{R}$$

enačba premice skozi točko (x_0, y_0) s smernim vektorjem $\vec{e}$.

Odvod sestavljene funkcije

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = f(x_0 + te_1, y_0 + te_2)$$

v točki $t = 0$ je enak

$$\boxed{g'(0) = f_x(x_0, y_0)e_1 + f_y(x_0, y_0)e_2 = \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \vec{e} =: f_{\vec{e}}(x_0, y_0)},$$

imenujemo ga **smerni odvod funkcije f v smeri vektorja $\vec{e}$** v točki (x_0, y_0).

Smerni odvod $f_{\vec{e}}(x_0, y_0)$ meri **spremembo funkcijske vrednosti** ob majhnem premiku iz točke (x_0, y_0) v smeri vektorja $\vec{e} = (e_1, e_2)$.

Smerni odvod funkcije dveh spremenljivk

Smerni odvod:

- v smeri vektorja $\vec{e} = (1, 0)$, je enak parcialnemu odvodu $f_{\vec{e}} = f_x$,
- v smeri vektorja $\vec{e} = (0, 1)$, je enak parcialnemu odvodu $f_{\vec{e}} = f_y$.

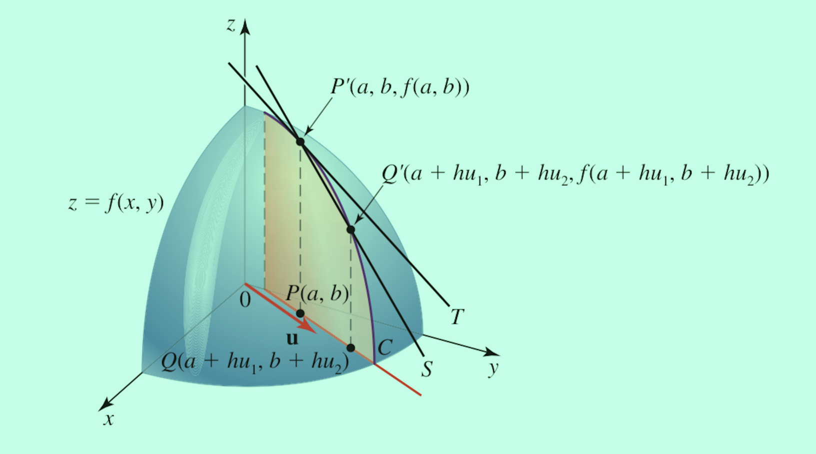
Smerni odvod

- je **relativna sprememba** funkcijske vrednosti ob majhnem premiku iz točke v smeri vektorja $\vec{e}$,
- **smerni koeficient tangente** na krivuljo

$$g(t) := f(x_0 + e_1 t, y_0 + e_2 t)$$

v točki $t = 0$, če po krivulji potujemo s hitrostjo velikosti vektorja (e_1, e_2).

Smerni odvod funkcjie dveh spremenljivk



Pomen odvodov za funkcijo dveh spremenljivk

Za funkcijo dveh spremenljivk $f = f(x, y)$ velja:

- če je $f_x(x_0, y_0) > 0$, f ob majhnem premiku iz točke (x_0, y_0) v smeri osi x, narašča, in če je $f_x(x_0, y_0) < 0$, pada,
- če je $f_y(x_0, y_0) > 0$, f ob majhnem premiku iz točke (x_0, y_0) v smeri osi y, narašča, in če je $f_y(x_0, y_0) < 0$, pada,
- za poljuben enotski vektor $\vec{e}$: če je $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) > 0$, potem f ob majhnem pomiku v smeri vektorja $\vec{e}$, narašča, in če je $f_{\vec{e}}(x_0, y_0) < 0$, pada.

Ali funkcija
$$f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$$
v točki $(2, -1)$ v smeri vektorja $(1, -1)$ narašča ali pada?

$$\begin{aligned} f_{(1,-1)}(2, -1) &= f_x(2, -1) \cdot 1 + f_y(2 - 1) \cdot (-1) \\ &= (2x + 2y)(2, -1) - (2x - 2y)(2, -1) = -4. \end{aligned}$$

Torej funkcija pada.

Pomen odvodov za funkcijo dveh spremenljivk

V kateri smeri se moramo premakniti iz točke (x_0, y_0), da bo funkcijska vrednost $f(x, y)$ najhitreje narasla?

Smerni odvod v smeri vektorja $\vec{e}$, kjer je $|\vec{e}| = 1$, je

$$\boxed{f_{\vec{e}}(x_0, y_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \vec{e} = |\text{grad } f(x_0, y_0)| \cos\varphi},$$

kjer je φ kot med grad$f(x_0, y_0)$ in $\vec{e}$.

Smerni odvod ima največjo vrednost, če je $\varphi = 0$, torej če $\vec{e}$ kaže v smeri vektorja grad $f(x_0, y_0)$. Vektor grad $f(x_0, y_0)$ torej kaže:

- **v smeri najhitrejšega naraščanja funkcijske vrednosti** (tj. največje strmine grafa),
- **v smeri pravokotno na nivojske krivulje**.

Primer. Za funkcijo $f(x,y) = x^2 - 2x + y$

- zapišimo gradient v točki $(0,0)$,
- poiščimo nivojsko krivuljo, ki gre skozi točko $(0,0)$,
- zapišimo enačbo tangente in normale na nivojsko krivuljo v tej točki.

Rešitve:

- $\operatorname{grad} f(0,0) = (2x-2,1)(0,0) = (-2,1)$.
- $f(0,0) = 0$:

$$\mathcal{N}_{f;0} = \{(x,y)\colon x^2 - 2x + y = 0\} = \{(x,y)\colon y = -x^2 + 2x\}.$$

- Tangenta na parabolo $y = -x^2 + 2x$ v (0,0):

$$y = y'(0)x = 2x.$$

- Normala na parabolo $y = -x^2 + 2x$ v (0,0):

$$y = -\frac{1}{y'(0)}x = -\frac{1}{2}x.$$

Primer. Trije enako močni oddajniki so v točkah $(-1, 1)$, $(0, 1)$ in $(2, 0)$. Jakost signala, ki ga oddaja posamezen oddajnik, pada z oddaljenostjo r tako kot funkcija e^{-r^2}, prispevki vseh treh oddajnikov pa se seštevajo. Jakost signala v točki (x, y) je torej:

$$f(x,y) = e^{-((x+1)^2+(y-1)^2)} + e^{-(x^2+(y-1)^2)} + e^{-((x-2)^2+y^2)}$$

(a) Iz točke $(0, 0)$ se malo pomaknemo v smeri osi x. Ali bo jakost signala padla ali narasla?

(b) V kateri smeri bo jakost naraščala najhitreje?

Rešitve:

$$\begin{aligned} f_{(1,0)}(0,0) = f_x(0,0) = \Big(& e^{-((x+1)^2+(y-1)^2)} \cdot (-2)(x+1) + \\ & e^{-(x^2+(y-1)^2)}(-2x) + e^{-((x-2)^2+y^2)} \cdot (-2(x-2))\Big)(0,0) \\ = -2e^{-2} + 4e^{-4} &= 2e^{-4}(-e^2+2) < 0. \end{aligned}$$

Torej bo jakost signala padala v točki $(0, 0)$ v smeri osi x padala.
Najhitreje bo jakost naraščala v smeri gradienta grad $f(0, 0)$.

$$\begin{aligned} f_{(0,1)}(0,0) = f_y(0,0) = \Big(& e^{-((x+1)^2+(y-1)^2)} \cdot (-2)(y-1) + \\ & e^{-(x^2+(y-1)^2)} \cdot (-2)(y-1) + e^{-((x-2)^2+y^2)} \cdot (-2y)\Big)(0,0) \\ = 2e^{-2} + 2e^{-1} &= 2e^{-2}(1+e). \end{aligned}$$

Torej je grad $f(0, 0) = (2e^{-4}(-e^2 + 2), 2e^{-2}(1 + e))$.