Osnove matematične analize

Prvi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

6. oktober 2020

Naravna števila

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

Peanovi aksiomi za naravna števila:

- 0 je naravno število.
- Vsako naravno število n ima naslednika $S(n) := n + 1$.
- 0 ni naslednik nobenega naravnega števila.
- Iz $n \neq n'$ sledi $S(n) \neq S(n')$.
- **Matematična indukcija.** Naj za neko podmnožico A množice $\mathbb{N}$ velja:
  1. $n_0 \in A$ za nek $n_0 \in \mathbb{N}$.
  2. Iz $k \in A$ sledi $k + 1 \in A$.

  Potem je $A = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$.

  ('Običajni' primer: $n_0 = 0 \Rightarrow A = \mathbb{N}$)

Dokazovanje z matematično indukcijo

Cilj: Dokazati, da neka trditev $T(n)$, ki vsebuje številsko spremenljivko n, velja za vsak n iz množice

$$\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\},$$

kjer je n_0 neko naravno število.

$\mathbf{T(n)}$ . . . indukcijska predpostavka

Postopek:

1. **Baza indukcije**: Dokažemo veljavnost $T(n_0)$.
2. **Indukcijski korak**: Dokažemo sklep

$$T(k) \text{ velja za nek } k \geq n_0. \Rightarrow T(k+1) \text{ velja.}$$

Matematična indukcija - primeri

1. **Dokazovanje enakosti**:

$$
\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4},
\end{aligned}
$$

   za vsa naravna števila $n \geq 1$.

2. **Dokazovanje neenakosti**:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

   za vsak $x > -1$ in $n \in \mathbb{N}$.

3. **Dokazovanje formul iz kombinatorike**: Število različnih vrstnih redov n različnih elementov je enako $n!$.

1. izpit 2019/20

Naloga

Naj bo $T(n)$ trditev o naravnem številu $n \in \mathbb{N}$. Vemo, da velja $T(3)$ in da iz resničnosti $T(n)$ sledi resničnost $T(n+4)$. Ali lahko sklepamo, da velja $T(2020)$? Odgovor dobro utemeljite.

Številske množice - $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

V $\mathbb{N}$ lahko $\boxed{\textbf{seštevamo, množimo, potenciramo}}$.

V **celih številih**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

lahko tudi $\boxed{\textbf{odštevamo}}$.

V **racionalnih številih** $\mathbb{Q}$ pa lahko še $\boxed{\textbf{delimo}}$ (azen z 0!):

- vsi kvocienti $\frac{n}{m}$, kjer $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$,
- vsak kvocient ima okrajšano obliko

$$\frac{x}{y},$$

kjer $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}, y \neq 0$, x in y nimata skupnih deliteljev.

Realna števila $\mathbb{R}$

Želja: Naj bo $A \subseteq \mathbb{Q}$ poljubna omejena množica, tj. obstajata $m, M \in \mathbb{Q}$, tako da je $m \leq a \leq M$ za vsak $a \in A$. Potem obstajata največji m in najmanjši M.

Potreba po **realnih številih** $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, kjer so $\mathbb{I}$ ...**iracionalna števila**
- model: točke na **številski premici**
- računanje: **neskončna decimalna števila**

$$x = \pm n.d_1 d_2 d_3 \ldots,$$

  kjer
  - je $n \in \mathbb{N}$ naravno število
  - so d_i decimalke, tj. $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.
  - ta zapis ni enoličen, na primer $1.000\ldots = 0.999\ldots$

Omejene podmožice realnih števil

A naj bo neprazna podmnožica v $\mathbb{R}$.

- A je **navzgor omejena**, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $a \leq M$ za vsak $a \in A$.
- Vsak M je **zgornja meja**, najmanjša med njimi **obstaja** (po konstrukciji $\mathbb{R}$) in se imenuje **supremum** $\sup(A)$ množice A.
- Če $\sup(A) \in A$, potem je $\sup(A)$ kar **maksimum** $\max(A)$ množice A.

Analogni pojmi:

- **Omejenost navzdol**.
- **Spodnja meja**, **infimum** $\inf(A)$ množice A.
- **Minimum** $\min(A)$.

Omejene podmožice realnih števil - primeri

- Ali je množica $A = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 2\}$ omejena? Če ja, kaj so $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\max(A)$, $\min(A)$?
- Ali je množica $B = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 - 3x + 2 < 0\}$ omejena? Če ja, kaj so $\sup(B)$, $\inf(B)$, $\max(B)$, $\min(B)$?

Številska premica

Intervali:

- **omejeni** - daljice na številski premici:
  - $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ odprt interval
  - $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ zaprt interval
  - $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ in
    $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ polodprta ali polzaprta intervala
- **neomejeni** - poltraki na številski premici:
  - $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ odprt navzgor neomejen interval
  - $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
  - $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
  - $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
  - $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$

∞ **ni število!**

Absolutna vrednost – razdalja na številski premici

Absolutna vrednost $|x|$ števila $x \in \mathbb{R}$ je **oddaljenost** števila x od števila 0 na številski premici in je enaka

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0, \\ -x & ; \quad x < 0. \end{cases}$$

Razdalja med številoma x in y je enaka $|x - y|$.

Osnovne lastnosti:

- **nenegativnost:** $|x| \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.
- **multiplikativnost:** $|xy| = |x||y|$.
- **trikotniška neenakost:** $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Absolutna vrednost

1. Narišimo množico realnih števil x, za katere velja $|x-5| \leq 2$.

2. Narišimo množico realnih števil x, za katere velja $|x-3| = |x+1|$.

3. Narišimo množico realnih števil x, za katere velja $||x-3|-2x| > 2$.

4. Narišimo množico točk (x, y) v ravnini, za katere velja $|x| + |y| < 1$.

Kompleksna števila $\mathbb{C}$

Cilj: Sedaj bi radi reševali še poljubne **algebraične enačbe**

$$\mathbf{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0},$$

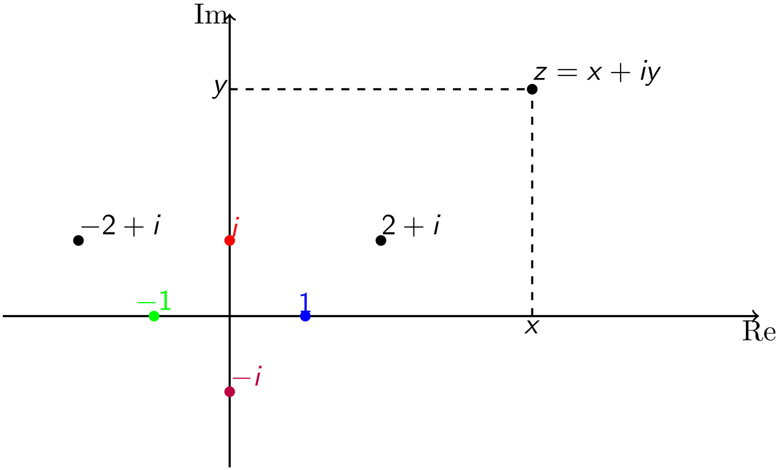
kjer je $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ in $a_n \neq 0$.

- Naprimer:
$$\mathbf{x^2 + 1 = 0}?$$
- V $\mathbb{R}$ rešitev ni. Proglasimo za rešitev **imaginarno enoto i**.
- Da ohranimo operaciji $\pm$, moramo $\mathbb{R}$ dodati vse izraze oblike
$$\mathbf{x + iy}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
- Dobimo $\mathbb{C}$, zaprto za $\pm$, $\cdot$, $:$ in izpolnjuje zgornji cilj.

Kompleksna števila $\mathbb{C}$

- $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
  - $\mathrm{Re}\,(z) = \mathbf{x} \ldots$ **realni del**,
  - $\mathrm{Im}\,(z) = \mathbf{y} \ldots$ **imaginarni del**.
- model: **kompleksna ravnina**.

Kompleksna števila $\mathbb{C}$



Računanje s kompleksnimi števili

Kompleksna števila lahko:

- **seštevamo** in **odštevamo**:

$$(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

- **množimo**:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2),$$

- **delimo** (deljenje z 0 ni definirano):

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(\mathbf{x_2 - iy_2})}{(x_2 + iy_2)(\mathbf{x_2 - iy_2})} = \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_1y_2 + y_1x_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

- **konjugiramo**:

$$\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{x} - \mathbf{iy} \quad \text{je } \textbf{konjugirano število}$$

števila $z = x + iy$.

Računanje s kompleksnimi števili

Trditev

Nekaj osnovnih lastnosti računanja s kompleksnimi števili:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\, z, \quad z - \bar{z} = 2i\, \mathrm{Im}\, z$

Zgled

Opišimo in narišimo množico kompleksnih števil $z \in \mathbb{C}$, za katere velja

1. $2\bar{z} - z^2 = 0$
2. $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\,(z^2) = 2$
3. $\bar{z}^2 = -2iz + 2i\bar{z} - z^2 - 2\bar{z}z$
4. $\bar{z}^2 = z^2$
5. $\bar{z}z = 1$
6. $z^2 + 2\bar{z}z + \bar{z}^2 = 2z + 2\bar{z}$

Računanje in kompleksna ravnina

- **seštevanje**: paralelogramsko pravilo,
- predpis $z \mapsto z + z_0$ določa **vzporedni premik** za z_0.
- **množenje**: predpis $z \mapsto az$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ je:
  - **razteg**, če je $a > 1$,
  - **krčenje**, če je $0 < a < 1$
  - **zrcaljenje čez koordinatno izhodišče**, če je $a = -1$.
- **konjugiranje**: zrcaljenje čez realno os.

Absolutna vrednost

Absolutna vrednost kompleksnega števila z je nenegativno realno število

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Geometrijski opis:

- $|z|$ je **oddaljenost** števila z od izhodišča v kompleksni ravnini
- $|z_1 - z_2|$ je **razdalja** med z_1 in z_2

Trditev

Predpis $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0, \infty)$ *ima naslednje lasnosti:*

- **multiplikativnost**: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- **invariantnost za konjugiranje**: $|\bar{z}| = |z|$
- **trikotniška neenakost**: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Dokaz trikotniške neenakosti

Pišemo $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Velja:

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2| &= |(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \\
&= \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2} \\
|z_1| + |z_2| &= |x_1 + iy_2| + |x_2 + iy_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.
\end{aligned}$$

Dokazujemo:

$$\sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Kvadriramo:

$$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+y_1^2+2y_1y_2+y_2^2 \leq x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}.$$

Dokaz trikotniške neenakosti

Poenostavimo:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}.$$

Če leva stran negativna, je neenakost res. Sicer ponovno kvadriramo:

$$x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 \leq x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2.$$

Poenostavimo:

$$2x_1 x_2 y_1 y_2 \leq x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2.$$

Oziroma:

$$0 \leq x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 = (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2.$$

Zadnja vrstica drži, kar dokaže vse prejšnje.

Primeri

Opišimo in narišimo množico kompleksnih števil $z \in \mathbb{C}$, za katere velja

1. $|z - w_0| = r$, kjer je $w_0 = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $r > 0$
2. $|z + i| < |z - 1|$