1. Za $\mathbf{x} = [x, y]^{\mathsf{T}}$ poišči splošne rešitve sistemov diferencialnih enačb $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ za naslednje matrike:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   S pomočjo octave-a nariši fazne slike (tire rešitev za več različnih začetnih pogojev) za vsakega od zgornjih sistemov. Kako lastne vrednosti matrike A vplivajo na obnašanje rešitev?

2. Osnovni SIR epidemološki model populacijo velikosti N razdeli na 3 dele: dovzetne S *(susceptible)*, kužne I *(infectious)* in okrevane R *(recovered)*. Dinamiko tega modela predstavimo s sistemom diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\frac{\beta I S}{N}, \\ \dot{I} &= \frac{\beta I S}{N} - \gamma I, \\ \dot{R} &= \gamma I, \end{aligned}$$

   kjer so $S(t)$, $I(t)$ in $R(t)$ funkcije časa, $\dot{S} = \frac{dS}{dt}$, $\dot{I} = \frac{dI}{dt}$ in $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$ pa njihovi odvodi. (Kvocient $\frac{\beta}{\gamma}$ pogosto označimo z R_0.)

   (a) Preveri, da velja $\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$ in zato $S(t) + I(t) + R(t) = N$ (konstanta – velikost populacije N).

   V nadaljevanju privzamemo $N = 1$, funkcije S, I in R tako predstavljajo ustrezne *deleže* populacije.

   (b) Utemelji, da je $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$, torej sta s stališča reševanja pomembni le prvi dve enačbi zgornjega sistema.

   (c) Uporabi `rk4` in poišči rešitve zgornjega sistema za nekaj izbranih začetnih pogojev in nekaj izbranih vrednosti parametrov β in γ.

3. *Matematično nihalo* je nihalo, pri katerem točkasta masa m visi na lahki, ravni (in neupogljivi) palici dolžine ℓ, ki se lahko prosto vrti okrog vpenjališča. Na maso m deluje gravitacijska sila mg, kot odmika od ravnovesne lege ob času t pa označimo s $\phi(t)$.

   (a) Prepričaj se, da funkcija ϕ reši diferencialno enačbo

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\sin(\phi) = 0.$$

   (b) Z uvedbo $\omega = \dot{\phi}$ prevedi zgornjo diferencialno enačbo 2. reda v sistem dveh diferencialnih enačb 1. reda.

   (c) Nariši fazno sliko $(\phi, \dot{\phi}) = (\phi, \omega)$ zgornje diferencialne enačbe. Pomagaj si z `rk4`.