Linearna algebra **3. teden**

Matrike, 1. del. Sistemi linearnih enačb.

Polona Oblak

1. Novo definirani pojmi

- *Matrike*
  - Definicija, video.
  - Enakost matrik, video.
  - *Množenje matrike s skalarjem* video,
  - *Vsota matrik* in *linearne kombinacije matrik*, video.
    - Primer: Ali lahko zapišemo matriko $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ kot linearno kombinacijo matrik $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$? (Rešitev.)
    - Lastnosti vsote matrik in množenja matrik s skalarji, video.
  - *Množenje matrik*
    - Uvod, video.
    - Definicija, video.
    - Primer: Naj bosta $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunajte tiste izmed rezultatov, ki jih lahko: AB, BA, $A+B$, $A-2B$.(Delna rešitev.)
    - O lastnostih množenja matrik se bomo več naučili prihodnjič.
  - Igrajte se sami z demonstracijo Wolfram demonstrations.
  - ϟ Naloga 1: Zapišite primere
    1. (1) neničelnih matrik A in B za katere je $AB = 0$ (s tem ste pokazali, da se lahko neničelni matriki zmnožita v ničelno),
    2. (2) neničelnih matrik C in D za katere je $CD \neq DC$ (s tem ste pokazali, da množenje matrik ni komutativno),
    3. (3) neničelnih matrik E, F in G za katere je $EG = FG$, a $E \neq F$ (s tem ste pokazali, da v matričnih enakostih ne morete krajšati skupnega faktorja),
- Sistemi linearnih enačb.
  - Množenje matrik in sistemi linearnih enačb, video.
  - *Sistem linearnih enačb*, *matrika sistema*, *razširjena matrika sistema*, video.
  - Gaussova eliminacija, video.
  - Primer Gaussove eliminacije (linearni sistem, ki ima rešitev), video.
  - Primer Gaussove eliminacije (linearni sistem, ki nima rešitve), video.
  - *Vrstično stopničasta oblika* matrike, *pivoti*, *rang* matrike, video.
  - ϟ Naloga 2: Zapišite primer neničelne matrike
    1. (1) A, katere rang je enak številu njenih neničelnih vrstic.

(2) B, katere rang je enak številu njenih neničelnih stolpcev.
(3) C, katere rang je enak številu stolpcev, a manjši od števila vrstic.
(4) D, katere rang je enak številu vrstic, a manjši od števila stolpcev.
(5) E, katere rang je enak številu vrstic in številu stolpcev.

- *Reducirano vrstično stopničasta oblika* matrike, *glavne* in *proste* neznanke, video.
- Če rešujete sistem linearnih enačb s tremi neznankami, vsaka od enačb določa ravnino v $\mathbb{R}^3$. Poglejte si, kako se ravnine spreminjajo v skladu z elementarnimi Gaussovimi operacijami: Wolfram demonstrations. Poskusite sistem prevesti na reducirano stopničasto obliko in poglejte pripadajoče ravnine.
- Primer Gaussove eliminacije (linearni sistem, ki ima neskončno rešitev), video.
- Homogeni sistem linearnih enačb, video.

• Zapiski predavanj, 3. teden.

2. Kje si še lahko preberem/ogledam snov?

(1) Bojan Orel: Linearna algebra, Založba FRI, 2015, Poglavje 1.
(2) Polona Oblak: Matematika, Poglavje 5.
(3) Gilbert Strang: Introduction to Linear Algebra, 2009, Chapter 1.
(4) James Stewart, Calculus, early transcendentals, 2016, Chapter 12.
(5) David Poole: Linear Algebra, a modern introduction, 2006, Chapter 1.

3. Ali razumem snov?

ϟ(1) Drži ali ne drži?
(a) Obstaja matrika $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ brez ničelnih vrstic in obstaja vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$, za katera ima linearni sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ natanko eno rešitev.
(b) Obstaja matrika $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ brez ničelnih vrstic in obstaja vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^4$, za katera ima linearni sistem enačb $A\vec{x} = \vec{b}$ natanko dve rešitvi.
(c) Rang matrike je enak številu njenih neničelnih vrstic.
(d) Vsaka kvadratna $n \times n$ matrika ima rang enak n.
(e) Za $m \times n$ matriko A velja $\mathrm{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.
(f) Če za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $\mathrm{rang}(A) = n$, potem ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ natanko eno rešitev.
(g) Če za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja $\mathrm{rang}(A) = n-1$, potem sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ nima rešitev.

ϟ(2) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{5\times 8}$ matrika ranga 5. Katere od naslednjih trditev so resnične?
(a) Matrika A ima vseh pet vrstic neničelnih.
(b) Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$ ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ neskončno rešitev.
(c) Za vsak vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$ ima sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ natanko eno rešitev.

(d) Obstaja vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$, za katerega sistem $A\vec{x} = b$ nima rešitev.

ϟ(3) Naj za matriko $A \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ velja $\mathrm{rang}(A) = 4$ in naj bosta $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ in $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$ takšna vektorja, da je $A\vec{v} = A\vec{w}$. Pokažite, da tedaj velja $\vec{v} = \vec{w}$.

ϟ(4) Aleksandra Franc: Rešene naloge iz linearne algebre, 2019, Poglavje 2.

(Naloge, označene s ϟ preverjajo razumevanje osnovnih pojmov in so primeri nalog s teoretičnih izpitov.)