Ploščina trikotnika z oglišči na treh krožnicah

V ravnini $\mathbb{R}^2$ imamo tri krožnice: K_1, K_2 in K_3. Trikotnik ABC ima oglišče A na krožnici K_1, oglišče B na K_2 in oglišče C na K_3. Med vsemi takimi trikotniki ABC želimo poiskati tistega z največjo ploščino. Označimo s (p_i, q_i) koordinate središča krožnice K_i, z $r_i > 0$ pa polmer krožnice K_i. Napišite program, ki za tri krožnice dane s $[p_i, q_i, r_i]^\mathsf{T}$ poišče trikotnik ABC z največjo ploščino.

Naloga

1. Nalogo rešite tako, da poiščete *minimum* ustrezne funkcije treh spremenljivk z metodo najhitrejšega spusta. Nasvet: Držite se spodnjih opornih točk, da določite gradient ustrezne funkcije treh spremenljivk. (Seveda lahko rabo metode najhitrejšega spusta ustrezno prilagodite...)

   (a) Naj bodo $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ in $\mathbf{p}_3$ parametrizacije treh (zaenkrat poljubnih) ravninskih krivulj. Zapišite formulo za ploščino trikotnika z oglišči na teh treh krivuljah. Krajevni vektorji oglišč tega trikotnika so torej $\mathbf{p}_1(t)$, $\mathbf{p}_2(u)$ in $\mathbf{p}_3(v)$, ploščina tega trikotnika pa je funkcija treh spremenljivk, označimo jo z $f(t,u,v)$.

   (b) Izrazite gradient funkcije $-f^2$ le z uporabo parametrizacij $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ in $\mathbf{p}_3$ ter njihovih odvodov $\dot{\mathbf{p}}_1$, $\dot{\mathbf{p}}_2$ in $\dot{\mathbf{p}}_3$. Namig: Verižno pravilo.

   (c) Zapišite parametrizacijo krožnice s polmerom r in središčem v točki (p,q).

   (d) Kako se izraža $\mathrm{grad}(-f^2)$, ko so $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ in $\mathbf{p}_3$ parametrizacije treh krožnic? Namig: Spet verižno pravilo.

2. Poiščite ustrezen lokalni minimum funkcije $-f^2$ z metodo najhitrejšega spusta. Iz parametrov t, u in v, pri katerih $-f^2$ zavzame minimum, nato izračunajte krajevne vektorje oglišč trikotnika z največjo ploščino in njegovo dejansko ploščino.

3. Napišite funkcijo `[T, pl] = trikotnik(K)`, ki vrne krajevne vektorje oglišč trikotnika v `T` in ploščino trikotnika v `pl`.

   (a) `T` naj bo 2×3 matrika krajevnih vektorjev oglišč tega trikotnika, kjer je prvo oglišče na prvi krožnici, drugo na drugi in tretje na tretji. Koordinate oglišč naj bodo izračunane na **8 decimalk** natančno (absolutna napaka).

   (b) `pl` naj bo ploščina tega trikotnika.

   (c) `K = [k1, k2, k3]` naj bo 3×3 matrika s stolpci oblike $\mathbf{k}_i = [p_i, q_i, r_i]^\mathsf{T}$, kjer je r_i polmer, (p_i, q_i) pa središče krožnice K_i.

4. Datoteki `trikotnik.m` dodajte komentarje, test in demo. Za test poiščite primerno konfiguracijo krožnic, za katero znate uganiti (ali poiskati) rešitev direktno. Demo naj nariše vse tri krožnice in trikotnik z oglišči na teh treh krožnicah, ki ima največjo ploščino.

   Podatke za demo vzemite iz svoje vpisne številke: prve tri števke naj bodo p_1, p_2, p_3, zadnje tri števke q_1, q_2 in q_3, i-ti polmer pa dobite iz $r_i = p_i + q_i + 1$. (Vaša vpisna številka je torej $\mathsf{p}_1\mathsf{p}_2\mathsf{p}_3{*}{*}\mathsf{q}_1\mathsf{q}_2\mathsf{q}_3$.)

Opozorilo: Zgoraj opisana metoda je občutljiva na orientacijo trikotnika, tj. izbiro zaporedja oglišč trikotnika. Temu se v splošnem ne da izogniti, saj je končna rešitev lahko trikotnik s pozitivno ali negativno orientacijo. Vseeno želimo, da funkcija `trikotnik` res vrne trikotnik z največjo ploščino. Razmislite, kako rešiti to težavo. (*Namig:* Zamenjava vrstnega reda dveh oglišč spremeni orientacijo trikotnika.)

Oddaja naloge

Na spletno učilnico oddajte naslednje:

1. datoteko **trikotnik.m**, ki naj vsebuje komentarje, test in demo,
2. datoteko **resitev.pdf**, ki vsebuje izpeljavo rešitve in odgovore na vprašanja.

S kolegi se lahko posvetujete in lahko tudi skupaj rešujete nalogo, vendar morate program in poročilo izdelati sami. Uporabljate lahko vse Octave funkcije, ki smo jih izdelali na vajah.