

Diskretne strukture UNI

Vaje, 6. teden

1. Naj bodo področje pogovora naravna števila in naj bodo predikati

$P(x)$: x je praštevilo.

$D(x, y)$: število x deli število y

Določi logične vrednosti formul

- (a) $\forall x(P(x) \vee D(2, x))$
- (b) $\exists x(P(x) \wedge D(2, x))$
- (c) $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg D(10, x))$
- (d) $\forall x(D(4, x) \Rightarrow D(2, x))$
- (e) $\forall x \exists y(P(y) \wedge D(y, x))$
- (f) $\exists x \forall y(D(x, y) \Rightarrow \neg P(y))$
- (g) $\forall x \exists y(P(x) \Rightarrow P(y) \wedge D(y, x))$

Zapiši še negacije formul.

2. Na otoku ljudje živijo v Severni vasi in Južni vasi. Otočani imajo črne in bele ovce. Zapiši s formulami naslednje izjave.

- (a) Vsak prebivalec Severne vasi ima vsaj eno črno ovco.
- (b) Vsak prebivalec Južne vasi ima vsaj eno črno ovco in eno belo ovco.
- (c) Obstaja prebivalec Severne vasi, ki nima črne ovce.
- (d) Vsak prebivalec Severne vasi pozna prebivalca Južne vasi, ki ima belo ovco.
- (e) Neki prebivalec Južne vasi pozna prebivalca Severne vasi, ki ima črno ovco.
- (f) Neki prebivalec Južne vasi pozna vse prebivalce Severne vasi, ki imajo črno ovco.

3. Katere izmed formul so med sabo enakovredne in katere ne? Odgovore dobro utemelji!

$$A = \forall y \exists x(P(x) \vee \neg Q(y)) \quad B = \forall y(\exists x \neg P(x) \vee Q(y))$$

$$C = \exists x(P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)) \quad D = \exists y(P(y) \vee \forall x \neg Q(x))$$

4. Katere izmed spodnjih formul so enakovredne?

$$A = \exists x(\forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y R(x, y)),$$

$$B = \exists x(\forall y P(y, x) \Rightarrow \forall y R(x, y)),$$

$$C = \exists x(\forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y R(y, x)).$$

5. Poišči interpretacije, v katerih imajo naslednji pari izjavnih formul nasprotno logično vrednost.

(a) $\forall x(P(x) \Rightarrow R(x)), \exists x(P(x) \Rightarrow R(x))$

(b) $\forall x(P(x) \Leftrightarrow R(x)), \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$

(c) $\forall x \forall y(P(x) \Rightarrow P(y)), 0$

(d) $\forall x \forall y (P(x) \Rightarrow P(y)), 1$

6. Pokaži, da sta formuli

$$F_1 = \neg \exists x ((\neg R(x) \Rightarrow P(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow R(x)))$$

in

$$F_2 = \forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg \exists y R(y)$$

enakovredni.

7. Na množici celih števil \mathbb{Z} je definiran predikat $P(m, n)$. Zanj vemo, da so za vsak par celih števil m in n resnične naslednje izjave:

P0. $P(0, 0)$,

P1. $P(m, n) \Leftrightarrow P(m, n + 2)$,

P2. $P(m, n) \Leftrightarrow P(m + 2, n - 1)$,

P3. $P(m, n) \Leftrightarrow P(m - 1, n - 1)$.

Katere od naslednjih izjav so resnične?

(a) $P(1, 1)$,

(b) $P(2, 5)$,

(c) $\forall m \forall n P(m, n)$