Osnove matematične analize
Vaje, 5. teden

1. Za vsako izmed spodnjih zaporedij razišči monotonost, omejenost in konvergenco. Če imajo limito določi tudi prvi člen zaporedja, ki je od nje oddaljen za manj kot $\frac{1}{10}$.

   (a) $a_n = \frac{n}{3n-1}$

   (b) * $a_n = \frac{2^n-4}{2^n+4}$

   (c) * $a_n = -\frac{n^2+n}{n^2+1}$

   Rešitve:

   (a) padajoče od $n = 1$ naprej, navzdol omejeno z 0, limita je $\frac{1}{3}$, $n_0 = 2$,

   (b) naraščajoče, navzgor omejeno z 1, limita je 1, $n_0 = 7$,

   (c) naraščajoče od $n = 2$ naprej, navzgor omejeno z 0, limita je -1, $n_0 = 1$.

2. * Izračunaj naslednje limite zaporedij:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+1}{-2n^2+n-3} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \qquad d)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n^2+1}-n+3}{\sqrt{n^4+n-1}+n-6}$$

   Rešitve: (a) $-\frac{1}{2}$, (b) 3, (c) 0, (d) 1.

3. * Dokaži, da je zaporedje, podano kot

$$a_0 = 0,\ a_{n+1} = \frac{-2}{a_n+3},$$

   konvergentno in izračunaj njegovo limito.

   Rešitev: Zaporedje je padajoče in navzdol omejeno z -1, zato je konvergentno. Limita je -1.

4. Dokaži, da je zaporedje, podano kot

$$a_0 = -3,\ a_{n+1} = e^{a_n} - 1,$$

   konvergentno in izračunaj njegovo limito. Kaj pa če vzamemo za prvi člen zaporedja $a_0 = 3$?

   Rešitev: Zaporedje je naraščajoče in navzgor omejeno z 0, zato je konvergentno. Limita je 0. Če za prvi člen vzamemo 3, je še vedno naraščajoče, vendar ni navzgor omejeno in zato ne konvergira.

5. * Izračunaj limite naslednjih zaporedij.

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad (b)\ \lim_{n\to\infty} \left(2-\frac{n}{n+1}\right)^{2n-1}$$

$$(c)\ \lim_{n\to\infty} n\left(\log(n+1)-\log n\right) \qquad (d)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sin(n^2)+n-6}{n^3-n+1}$$

   Rešitve: (a) $\frac{1}{e}$, (b) e^2, (c) 1, (d) 0.

6. Podani sta vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} \quad \text{ter} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n.$$

   Za vsako izmed omenjenih vrst

(a) ugani in dokaži formulo za $n-$to delno vsoto ter

(b) po definiciji izračunaj vsoto vrste, če obstaja.

Rešitve: Prva vrsta konvergira k $\frac{3}{2}$, delne vsote so $s_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Druga vrsta divergira, ker je alternirajoča, členi pa ne konvergirajo k 0.

7. Izračunaj vsoto naslednjih geometrijskih vrst.

(a) * $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3^n}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n-1}}$

(c) * $3/2 + 1 + 2/3 + 4/9 + 8/27 + \dots$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3 \cdot 2^{3n-2}}$

(e) * $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x}{2})^{3n}$, za tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere vrsta konvergira.

Rešitve: (a) 5, (b) $\frac{4}{21}$, (c) $\frac{9}{2}$, (d) $-\frac{4}{15}$, (e) $\frac{x^3}{8-x^3}$.

8. Izračunaj obseg Hilbertove krivulje.