

# Osnove matematične analize

## Vaje, 4. teden

1. \* Nariši naslednjo podmnožico v  $\mathbb{C}$ :

$$A = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1, \operatorname{Im}(z) < \sqrt{2}/2, 0 < \operatorname{Re}(z) < \sqrt{2}/2\}$$

Z območjem  $A$  naredimo naslednjo transformacijo:

- (a) zavrtimo ga okoli števila 1 za kot  $-\pi/2$ ;
- (b) prezrcalimo ga preko osi  $\operatorname{Re}(z)$ ;
- (c) premaknemo ga za 2 v levo in 1 navzdol;
- (d) zavrtimo ga okoli števila  $i$  za kot  $\pi/2$ .

Zapiši predpis  $z \mapsto f(z)$ , ki opravi to kompleksno transformacijo. Nariši tudi  $f(A)$  ter ugotovi, kam se preslika število  $1 + i$ .

Rešitev:  $z \mapsto -\bar{z} + 3, 1 + i \mapsto 2 + i$ .

2. \* Reši naslednje enačbe:

- (a)  $z^2 = 1 + i$ ,
- (b)  $z^3 = -\frac{27}{\sqrt{2}} + \frac{27}{\sqrt{2}}i$ ,
- (c)  $z^6 = -64i$ ,
- (d)  $z^4 = -1 + i\sqrt{3}$ .

Rešitve: (a)  $r = \sqrt[4]{2}, \varphi_k = \frac{\pi}{8} + \pi k, k = 0, 1$ , (b)  $r = 3, \varphi_k = \frac{3\pi}{12} + \frac{8\pi k}{12}, k = 0, 1, 2$ , (c)  $r = 2, \varphi_k = \frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi k}{12}, k = 0, 1, \dots, 5$ , (d)  $r = \sqrt[4]{2}, \varphi_k = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi k}{6}, k = 0, 1, 2, 3$ .

3. \* Poišči algebraično enačbo stopnje 3 z realnimi koeficienti, ki ima eno od rešitev  $1 + i$ , vsoto rešitev pa 4.

Rešitev:  $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$ .

4. \* Za vsako izmed spodnjih zaporedij razišči monotonost, omejenost in konvergenco. Če imajo limito določi tudi prvi člen zaporedja, ki je od nje oddaljen za manj kot  $\frac{1}{10}$ .

- (a)  $a_n = \frac{n}{3n-1}$
- (b)  $a_n = \frac{2^n-4}{2^n+4}$
- (c)  $a_n = -\frac{n^2+n}{n^2+1}$

Rešitve:

- (a) padajoče od  $n = 1$  naprej, navzdol omejeno z 0, limita je  $\frac{1}{3}, n_0 = 2$ ,
- (b) naraščajoče, navzgor omejeno z 1, limita je 1,  $n_0 = 7$ ,
- (c) naraščajoče od  $n = 2$  naprej, navzgor omejeno z 0, limita je  $-1, n_0 = 1$ .

5. Izračunaj naslednje limite zaporedij:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{-2n^2 + n - 3}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2+1} - n + 3}{\sqrt{n^4+n-1} + n - 6}$

Rešitve: (a)  $-\frac{1}{2}$ , (b) 3, (c) 0, (d) 1.