Reševanje sistemov nelinearnih enačb
Zanimalo nas bo, kako poiskati vsaj eno rešitev (oziroma približek rešitve) sistema enačb oblike

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 &= 1, \\ x_1 + x_2 - x_1 x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Zgornji sistem je enakovreden sistemu

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 - 1 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_1 x_2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Če predpišemo $\mathbf{F}(x_1, x_2) = [x_1^2 - x_2^2 - 1, x_1 + x_2 - x_1 x_2 - 1]^\mathsf{T}$, potem lahko sistem strnjeno zapišemo v obliki

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

kjer je $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^\mathsf{T}$. Iščemo torej ničle funkcije $\mathbf{F}$, ki je vektorska funkcija več spremenljivk.

Zastavimo stvar nekoliko spošneje. Naj bo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ območje, $\mathbf{F}\colon U \to \mathbb{R}^n$ pa funkcija definirana na U. Idejo za iskanje ničle te funkcije dobimo iz običajne Newtonove iteracije za funkcije ene spremenljivke $f : D \to \mathbb{R}$, ki pravi, da začnemo z nekim *začetnim približkom* $x^{(0)} \in D$, nato pa 'rešitev' iterativno izboljšujemo:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Za vektorsko funkcijo $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n)]^\mathsf{T}$ odvod f' nadomestimo z *Jacobijevo matriko* funkcije $\mathbf{F}$:

$$J\mathbf{F} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right]_{i,j}.$$

En korak *Newtonove iteracije* pa postane

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - (J\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

1. Poišči približek $[x_1, x_2]^\mathsf{T}$ za rešitev sistema

   $$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 &= 1, \\ x_1 + x_2 - x_1 x_2 &= 1. \end{aligned}$$

   na 10 mest za decimalno piko natančno.
   V octave-u napiši funkcijo `x = newton(F, JF, x0, tol, maxit)`, ki izvede Newtonovo iteracijo z začetnim približkom `x0` za funkcijo `F` z Jacobijevo matriko `JF`. Z `maxit` omejimo največje dovoljeno število iteracij, v `tol` pa predpišemo zahtevano natančnost.

2. Naj bo f funkcija dveh spremenljivk, x in y. Na implicitno dani krivulji z enačbo

$$f(x,y) = 0$$

bi radi poiskali gost nabor točk, ki so med seboj enako oddaljene (na enaki evklidski razdalji). Označimo to razdaljo z δ. Recimo, da prvo točko na krivulji, (x_0, y_0), že poznamo. Naslednja točka, označimo jo kar z (x, y), je od (x_0, y_0) oddaljena za δ in leži na naši krivulji. To pomeni, da mora (x, y) zadoščati sistemu enačb

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0, \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 &= \delta^2. \end{aligned}$$

Naslednjo točko na krivulji torej dobimo kot rešitev zgornjega sistema, označimo to rešitev z (x_1, y_1). Postopek ponovimo z (x_1, y_1) namesto (x_0, y_0) in dobimo (x_2, y_2). Nadaljujemo, dokler nismo zadovoljni ali z dobljenim številom točk ali pa smo prišli dovolj blizu začetne točke.

Napiši octave funkcijo `K = krivulja(f, gradf, T0, delta, n)`, ki v $2\times n$ matriki `K` vrne krajevne vektorje točk na krivulji z enačbo $f(x,y) = 0$, ki so oddaljene za δ. (`f` je funkcija dveh spremenljivk, `gradf` je njen gradient, `T0` je začetna točka na krivulji.)